

THESES

présentées

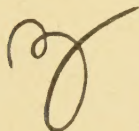
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

G. DENOËL



1^{ère} THESE : Etude des systèmes en chaîne à deux et à vingt degrés de liberté couplés comportant un amortissement interne par frottement de Coulomb

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 29 juin 1968 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

M. GUEVEL

M. TARDY

Président

Examineurs

THESES

présentées

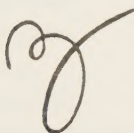
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

G. DENOËL



1^{ère} THESE : Etude des systèmes en chaîne à deux et à vingt degrés de liberté couplés comportant un amortissement interne par frottement de Coulomb

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 29 juin 1968 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

M. GUEVEL

M. TARDY

Président

Examineurs

832311



UNIVERSITE DE NANTES
FACULTE DES SCIENCES

Doyen	M. DUNOYER de SEGONZAC	Chimie
Assesseur	M. SELLIER	Zoologie
Professeurs	M. PAUC	Mathématiques
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAFFIN	Mécanique rationnelle
	M. GARRIGUES	Biologie végétale
	M. BRILLOUET	Analyse numérique
	M. GRAFF	Chimie
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	Mathématiques appliquées
	M. COLLET	Physique
	M. BOULLLOUD (C.S.U.)	Physique
	Mlle DEBRAUX	Botanique
	M. PETRESCO	Mathématiques
	M. PIERI	Biologie animale
	M. WOJTKOWIAK	Chimie
	M. AVIGNON	Physique
	M. MOUTON	Physique
	M. GOBIN (E.N.S.M.)	Chimie
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
	M. MEZENECV (E.N.S.M.)	Physique
Professeurs sans chaire	M. MOLINARO	Mathématiques
	M. DUPONT	Biologie végétale
	M. ROUXEL	Chimie
	M. MINN	Physique
	M. QUINIOU	Chimie
	Mlle OFFRET (E.N.S.M.)	Physique
	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. LASKAR	Physique
	M. SAUDRAY	Biologie animale
	M. MARTIN	Chimie
	M. GOUREAUX	Physique
	M. LE DOUARIN Georges	Biologie végétale
	M. AMOURIQ	Psychophysiologie
	Mlle ASTIE (C.S.U.)	Botanique
	M. LAMEAU (E.N.S.M.)	Mathématiques
	Mme LE DOUARIN Nicole	Biologie végétale
	M. TOURNOUX	Chimie minérale
	M. GUEVEL (E.N.S.M.)	Mathématiques
	M. GOUIN (C.S.U.)	Chimie
	M. POINTEAU (E.N.S.M.)	Chimie
Maîtres de Conférences	M. SULMONT (E.N.S.M.)	Mathématiques
	M. BARDON	Physique
	M. LONCKE	Physique
	M. LEBRUN	Biologie animale
	M. CORBEL (C.S.U.)	Biologie animale
	M. JONARD	Biologie végétale
	M. IBISCH Maître de Conférences associé	
	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. PAILLET	Attaché Principal
Secrétaire de la Faculté		

Nous tenons tout d'abord à remercier tous ceux qui ont prêté leur concours à la réalisation du présent travail.

C'est à Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, Ancien Directeur de l'E.N.S.M., que nous adressons particulièrement nos plus vifs remerciements. C'est lui qui nous a initié à la recherche, qui nous a constamment conseillé et encouragé, tant sur le plan théorique qu'expérimental. C'est dans son laboratoire de mécanique des structures qu'ont été effectuées toutes les expériences. Nous lui exprimons ici notre profonde et respectueuse gratitude d'avoir bien voulu assumer la présidence de cette thèse.

Nous tenons à témoigner tous nos remerciements à Messieurs les Professeurs GUEVEL et TARDY qui nous ont fait l'honneur de constituer les membres du Jury.

Toute notre reconnaissance s'adresse au personnel technique du laboratoire de mécanique des structures pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée dans les réalisations techniques.

Enfin, nous ne saurions oublier d'adresser nos remerciements à Madame ALUSSON et à Madame OMNES ainsi qu'au Service de l'imprimerie de l'E.N.S.M. qui ont su réaliser avec goût et compétence la présente thèse.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555419_0011

AVANT - PROPOS

L'objet du présent travail est d'apporter une contribution à l'étude des systèmes en chaîne à hystérésis interne. En mécanique des structures, l'étude des systèmes à hystérésis interne peut présenter une grande importance étant donné, que leur présence est très fréquente dans les structures réelles, et surtout leur caractère dissipatif. Cette énergie dissipée a été mise à profit dans de nombreuses réalisations techniques : citons, par exemple, la construction, pour la première fois, par KROON en 1940 d'ailettes de turbine en deux segments, idée reprise en 1956 par KLUMPP et GOODMAN qui ont montré l'importance de l'énergie dissipée par glissement d'un segment sur l'autre. Citons encore une contribution à l'amortissement des véhicules automobiles soumis à l'excitation aléatoire du profil de la route, à l'amortissement des structures rivetées ou boulonnées, des structures en béton ou encore à l'amortissement des vibrations de torsion des arbres d'hélice des navires tournant lentement. (Dans ce cas particulier, les paliers sont lubrifiés par l'eau, sans film, étant donné la faible vitesse, et alors les paliers sont secs : DEN HARTOG).

Le phénomène d'hystérésis peut se présenter sous différentes formes, la plus fréquente en mécanique étant la présence d'un frottement sec entre différentes parties d'une structure, la présence dans celle-ci de « matière plastique » ou, d'une manière plus générale, chaque fois qu'il y aura déformation d'un matériau dans le « domaine plastique ».

Pour notre part, l'hystérésis sera apporté par la présence d'éléments à frottement sec; frottement qui sera supposé suivre la loi de Coulomb. Nous avons opté pour ce type d'hystérésis du fait de la relative facilité de montages expérimentaux, la théorie restant inchangée, en principe, quelle que soit la forme du cycle.

Parmi les différentes possibilités de structures, nous nous sommes attachés à l'étude du cas particulier des systèmes en chaîne, soumis à l'une de leurs extrémités à une excitation forcée, sinusoïdale, l'autre étant libre. Entre chaque élément de la chaîne, se trouve un dispositif à frottement sec.

La présence du frottement sec se traduit dans les équations du mouvement par l'introduction d'un terme non linéaire d'où la difficulté qui se présente pour résoudre le système d'équations régissant le mouvement.

Par analogie au cas linéaire, nous n'avons envisagé que la recherche de réponses sinusoïdales, ce qui est largement vérifié par l'expérience. D'autre part, nous avons supposé que la nature des surfaces en contact, là où il y a glissement, est suffisamment « propre » pour considérer le coefficient de frottement de COULOMB comme constant.

Dans un premier chapitre, nous avons considéré un système à deux degrés de liberté couplés, puis, dans un second, fait une extension à un système à vingt degrés de liberté couplés.

La recherche des réponses sinusoïdales a été effectuée à l'aide de la méthode de l'équilibre harmonique de KRYLOV et BOGOLIUBOV, qui a été utilisée pour la première fois par T.K. CAUGHEY en 1960 pour l'étude d'un seul degré de liberté, puis, plus récemment, par W.D. IVAN et F. BADRAKHAN pour l'étude de différents systèmes à cycle d'hystérésis par frottement sec.

TABLE DES MATIERES

Introduction

Chapitre premier : ETUDE D'UN SYSTEME EN CHAINE A DEUX DEGRES DE LIBERTE NON DECOUPLES COMPORTANT UN AMORTISSEMENT INTERNE PAR FROTTEMENT DE COULOMB

Introduction

A - ETUDE THEORIQUE

1 - Etude du système linéaire

- 1,1 - Préliminaires
- 1,2 - Mise en équation
- 1,3 - Résolution - Formes propres

2 - Etude du système non linéaire

- 2,1 - Mise en équation
- 2,2 - Cycle d'hystérésis
- 2,3 - Méthode de calcul
- 2,4 - Expression de $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$
- 2,5 - Etude du mouvement en régime permanent
- 2,6 - Etude à la résonance de phase
- 2,7 - Courbe « squelette »
- 2,8 - Etude énergétique
- 2,9 - Relation entre $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$ et les caractéristiques du système physique
- 2,10 - Conclusions théoriques

B - ETUDE EXPERIMENTALE

1 - Dispositif expérimental

2 - Etude statique

- 2,1 - Détermination des raideurs
- 2,2 - Calcul de l'inertie de chaque paramètre
- 2,3 - Tracé des cycles d'hystérésis
- 2,4 - Rapport des pentes
- 2,5 - Détermination du coefficient de frottement

3 - Etude dynamique

- 3,1 - A frottement constant et excitation variable
- 3,2 - A excitation constante et frottement variable

4 - Conclusion du premier chapitre

5 - Graphes

Chapitre deuxième : ETUDE D'UN SYSTEME EN CHAÎNE A VINGT DEGRES DE LIBERTE NON
DECOUPLES COMPORTANT UN AMORTISSEMENT INTERNE PAR FROTTEMENT
DE COULOMB ENTRE CHAQUE PARAMETRE

Introduction

A - ETUDE THEORIQUE

1 - Etude du système linéaire

1,1 - Préliminaires

1,2 - Mise en équation

1,3 - Résolution - Valeurs propres

2 - Etude du système non linéaire

2,1 - Mise en équation

2,2 - Cycle d'hystérésis

2,3 - Méthodes de calcul

2,4 - Expression de $C_P(A_P)$ et $S_P(A_P)$

2,5 - Etude du mouvement en régime permanent

2,5 - Etude à la résonance de phase

2,7 - Courbes « squelettes »

2,8 - Détermination des « fréquences propres »

2,9 - Etude énergétique

2,10- Conclusion théorique

B - ETUDE EXPERIMENTALE

1 - Dispositif expérimental

2 - Etude statique

2,1 - Détermination des différentes raideurs

2,2 - Calcul de l'inertie

2,3 - Tracé des cycles d'hystérésis, locaux et globaux

2,4 - Rapport des pentes

2,5 - Détermination du coefficient de frottement

Détermination de la raideur lorsqu'il n'y a pas glissement

Détermination du coefficient de frottement

3 - Etude dynamique

3,1 - Etude du système conservatif

3,2 - Etude à frottement constant

3,3 - Etude à excitation constante

4 - Conclusion du deuxième chapitre

5 - Graphes

Conclusion générale

Annexes

Bibliographie

Chapitre Premier

ETUDE D'UN SYSTEME EN CHAÎNE A HYSTERESIS INTERNE

ET A DEUX DEGRES DE LIBERTE COUPLES

L'étude d'un système en chaîne à hystérésis interne à deux, ou n degrés de liberté, est particulièrement importante . Elle nous permet de préciser le comportement d'un tel système en fonction des différents paramètres . Les principes et méthodes de calcul utilisés sont applicables dans l'étude des systèmes en chaîne à hystérésis interne, quels que soient la forme du cycle et le nombre de degrés de liberté .

Pour schématiser un tel système, nous avons considéré une chaîne de deux, puis de vingt disques identiques, reliés entre eux par un fil de torsion et par deux frotteurs, soumise, à une de ses extrémités , à une excitation forcée sinusoïdale réglable, l'autre extrémité étant libre .

INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre, considérons le système formé de deux disques identiques, reliés par une tige cylindrique élastique formant la raideur inter-disques, et de deux lames porteuses de frotteurs qui viennent exercer un couple de frottement réglable entre les deux disques, créant ainsi l'amortissement interne de la chaîne dû au frottement de Coulomb. Cette chaîne a l'une de ses extrémités libre, l'autre étant reliée à l'excitateur par la tige élastique de même raideur que celle existant entre les deux disques.

Si nous appliquons à l'extrémité libre, après avoir verrouillé à zéro le premier disque, un couple C croissant, l'ensemble se comporte d'abord comme un corps élastique et la rotation du deuxième disque varie linéairement en fonction du couple. Ceci s'explique par le fait que le couple appliqué n'est pas encore suffisant pour qu'il se produise un glissement au niveau des frotteurs, pour vaincre le couple de frottement de Coulomb; aussi le système est-il encore purement élastique avec une raideur égale à la raideur de la tige élastique, augmentée de la raideur en torsion des lames porteuses de frotteurs (ressorts en parallèle). La variation du couple en fonction de la rotation est représentée dans ce cas par le segment OE (fig. 1). Si, maintenant, l'on continue de faire croître le couple, il arrive un instant où la déformée est telle que le couple élastique, dû à la raideur en torsion des lamelles porteuses de frotteurs, est égale au couple de frottement; il se produit alors un début de glissement au niveau des frotteurs et sur la (fig. 1) le point E est alors arrivé au point G_0 . Si le couple continue de croître, le glissement continue, mais, maintenant, la rotation augmente bien plus vite car, en effet, il n'y a plus que la raideur k de la tige élastique et donc encore une déformation linéaire mais avec un coefficient plus petit. La variation du couple est alors représentée par la partie G_0A du cycle (fig. 1).

Si, maintenant, du point A , le couple C décroît, le déplacement diminue et le couple de frottement change de sens et donc, tant que le couple élastique dû à la raideur en torsion des lamelles n'aura pas atteint le couple de frottement, il n'y aura plus glissement et la déformation se fera avec une raideur K (raideur k tige élastique plus raideur en torsion des lamelles) et ceci jusqu'au point B qui est tel que le couple de frottement est égal au couple élastique des lamelles; et donc, en vertu de la loi de Coulomb, il y aura à nouveau glissement et la déformation se fera suivant une raideur k de la tige élastique et ainsi de suite.

On obtient, en définitive, un cycle fermé ou cycle d'hystérésis. Cycle réel (fig. 1)

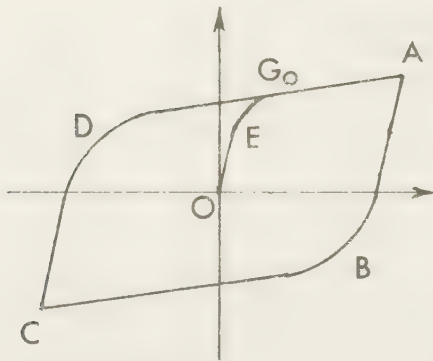


fig. 1

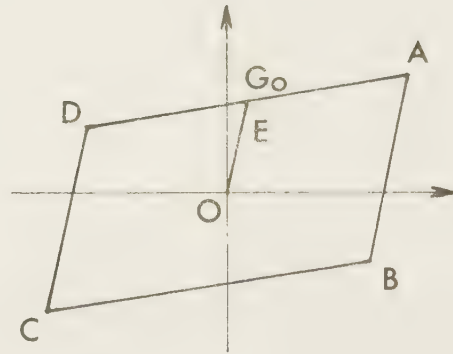


fig. 2

Le cycle d'hystérésis expérimental possède des angles plus ou moins arrondis et a l'allure de la (fig. 1) .

D'autre part, le point de départ O peut être quelconque. Dans l'étude théorique, nous supposons que le cycle formé est un parallélogramme centré, ce qui est toujours possible par une translation qui nous amènera à une position initiale absolument neutre, c'est-à-dire, aucun effort interne au départ; il est représenté par la figure 2 .

÷
÷ ÷
÷

A - ETUDE THEORIQUE

1 - ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE

1.1 Préliminaires

Le système en chaîne à deux degrés de liberté non découplés est représenté par le schéma suivant :

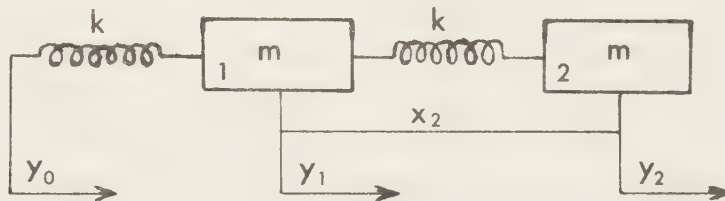


fig. 1,1

Posons :

- m : Masse élémentaire (les deux masses sont identiques)
- k : Raideur inter-masses et raideur d'entrée
- y_0 : Déplacement absolu de l'origine du premier ressort
- y_1 : Déplacement absolu de la première masse
- y_2 : Déplacement absolu de la deuxième masse
- x_2 : Déplacement relatif de la masse 2 par rapport à la masse 1

1.2 Mise en équation

D'après les théorèmes généraux de la mécanique générale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 &= -k (y_1 - y_0) - k (y_1 - y_2) \\ m \ddot{y}_2 &= -k (y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (1,1)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + 2k y_1 - k y_2 &= k y_0 \\ m \ddot{y}_2 - k y_1 + k y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1,2)$$

1.3 Résolution - Formes propres

1.3.1 Fréquences propres

Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \cdot [\ddot{Y}] + [K] \cdot [Y] = [F] \quad (1,3)$$

avec

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} k y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1,4)$$

Les fréquences propres sont données par l'équation caractéristique : $\det [K - \lambda M] = 0$
c'est-à-dire les racines de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & k - \lambda m \end{bmatrix} = 0 \quad (1,5)$$

$$\text{soit} \quad m^2 \left[\lambda^2 - \frac{3k}{m} \lambda + \frac{k^2}{m^2} \right] = 0 \quad (1,6)$$

équation qui a pour racines :

$$\lambda_i = \frac{k}{m} \cdot \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (1,7)$$

D'où les pulsations propres du système

$$\omega_{01}^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \quad \omega_{02}^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \quad (1,8)$$

1.3.2 Vecteurs propres

Les vecteurs propres Z_i sont obtenus en résolvant l'équation suivante

$$[K - \lambda_i M] \cdot [Z_i] = 0 \quad (1,9)$$

1,321 Premier vecteur propre correspondant à $\lambda_1 = \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$

Les équations sont les suivantes

$$\begin{bmatrix} 2k - \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) m & -k \\ -k & k - \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1,10)$$

Soit :

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot z_{11} - k \cdot z_{21} &= 0 \\ -k \cdot z_{11} + k \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) z_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (1,11)$$

Si l'on fait $z_{11} = 1$ on obtient

$$z_{21} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1,12)$$

D'où la forme propre correspondante

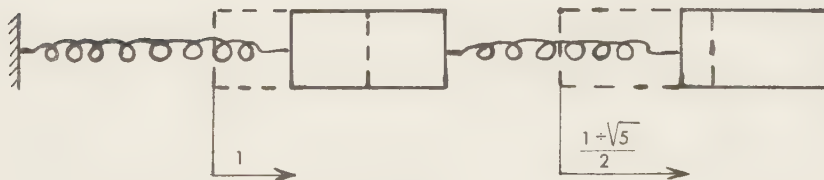


fig. 12

1,322 Deuxième vecteur propre correspondant à $\lambda_2 = \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot z_{12} - k \cdot z_{22} &= 0 \\ -k \cdot z_{12} - k \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) z_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (1,13)$$

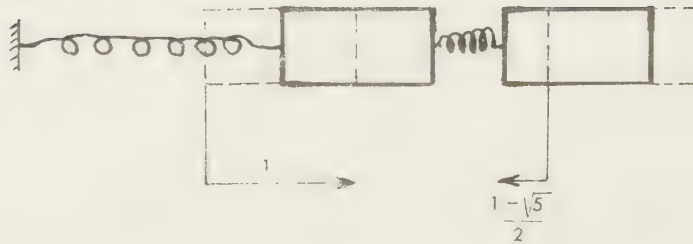
D'où le vecteur propre

$$z_{12} = 1$$

(1,14)

$$z_{22} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

D'où la forme propre correspondante :

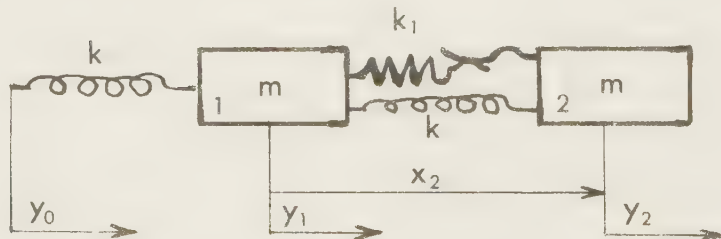


(fig. 1.3)

2 - ETUDE DU SYSTEME NON LINEAIRE

2.1 Mise en équation

Lorsqu'il y a frottement de Coulomb, le système peut être représenté par le schéma suivant :



(fig. 2.1)

Posons :

τ = force de glissement supposée constante au cours du temps ;

k_1 = raideur en série avec le frotteur

$K = k + k_1$: raideur inter paramètres lorsqu'il n'y a pas glissement

$g(x_2; \dot{x}_2)$: expression la plus générale de la force existant entre les masses (1) et (2)

d_0 : amplitude relative de début de glissement . $d_0 = \frac{\tau}{K}$

$y_0 = r \cos \omega t$; r constante réglable : excitation déplacement .

D'après les théorèmes généraux de la mécanique, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 &= -k (y_1 - y_0) + g(x_2; \dot{x}_2) \\ m \ddot{y}_2 &= -g(x_2; \dot{x}_2) \end{aligned} \quad (2,1)$$

Exprimons ces équations en fonction de y_1 et de x_2 . Nous avons :

$$y_2 = y_1 + x_2 \quad \text{ou} \quad y_2 - y_1 = x_2$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \ddot{x}_2$$

Les équations du système (2,1) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + k y_1 - g_2(x_2; \dot{x}_2) &= k y_0 \quad (1) \\ m \ddot{y}_1 + m \ddot{x}_2 + g_2(x_2; \dot{x}_2) &= 0 \quad (2) \end{aligned} \quad (2,2)$$

Éliminons $\ddot{y}_1$ dans l'équation (2,2,2)

$$\text{D'après (2,2,1)} \quad m \ddot{y}_1 = k y_0 - k y_1 + g_2(x_2; \dot{x}_2)$$

En reportant cette valeur dans (2,2,2) il vient :

$$m \ddot{x}_2 + k y_0 - k y_1 + 2g_2(x_2; \dot{x}_2) = 0 \quad (2,3)$$

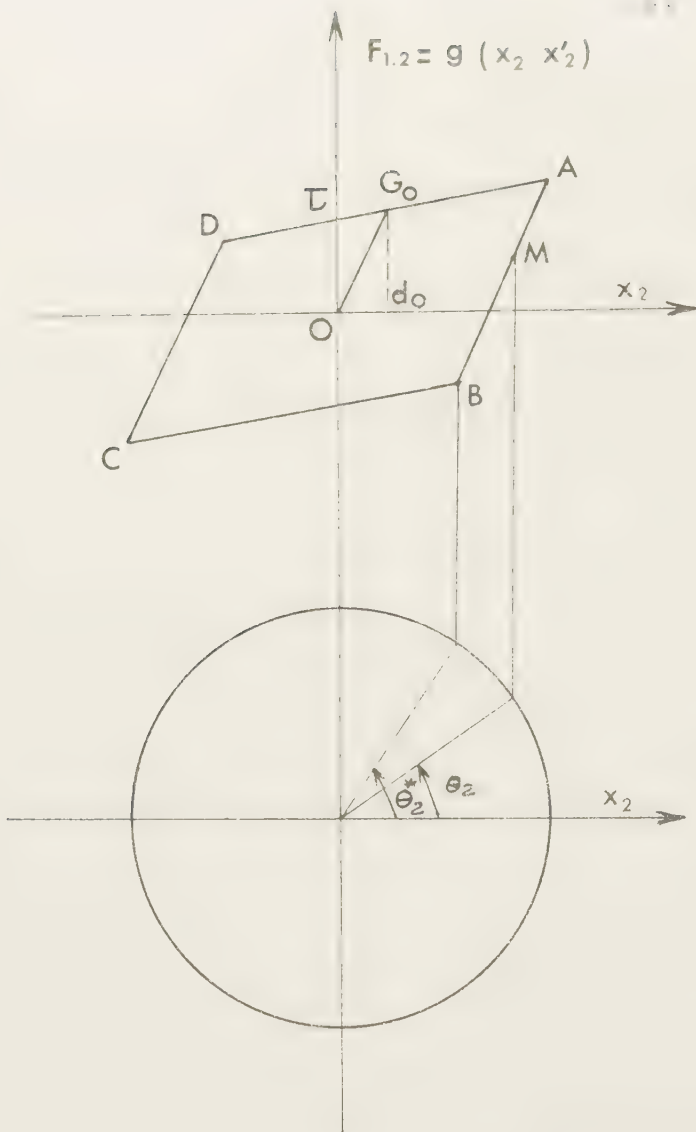
d'où, en définitive, le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + k y_1 - g_2(x_2; \dot{x}_2) &= E \cos \omega t \\ m \ddot{x}_2 - k y_1 + 2g_2(x_2; \dot{x}_2) &= -E \cos \omega t \end{aligned} \quad (2,4)$$

2.2 Cycle d'hystérésis

Nous avons posé $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ la force qui s'exerce entre les masses (1) et (2) ; aussi, pour pouvoir résoudre le système d'équations (2,4) nous faut-il connaître l'expression exacte de $g_2(x_2; \dot{x}_2)$.

La forme de $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ sera déterminée par un essai statique . Si l'on effectue un verrouillage de la masse (1) et que l'on applique sur la masse (2) une force F croissante, puis décroissante, on obtient le graphe suivant qui est un cycle d'hystérésis fermé et, théoriquement, un parallélogramme centré (fig. 2,2)



La force $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ représentée par le cycle fermé de la (fig. 2,2) sera complètement déterminée si nous connaissons les équations de ses différents segments.

En dynamique, le point figuratif parcourt tout le pourtour du cycle fermé (sans passer par l'origine s'il y a glissement).

Le temps de parcours du cycle sera la période.

2,21 Equation des différents segments

2,211 - Equation de OG_0

Sur OG il n'y a pas de glissement et le système est purement élastique, donc linéaire, avec une raideur $K = k + k_1$. L'équation de la force en fonction de la déformation est alors la suivante :

$$Y_{OG} = F_{12} = K x_2 \quad (2,5)$$

2,212 - Equation de DA et CB

Sur DA , il y a glissement et la déformation s'effectue avec raideur k ; par suite l'équation de la force est la suivante :

$$Y_{DA} = k x_2 + D A_0$$

De même pour CB

$$Y_{CB} = k x_2 - D A_0$$

Or :

$$D A_0 = (\tau - k d_0)$$

d'où les équations de DA et CB

$$Y_{DA} = k x_2 + (\tau - k d_0) \quad (1)$$

$$Y_{CB} = k x_2 - (\tau - k d_0) \quad (2)$$

(2,6)

3,213 Equation de AB et CD

Sur AB le système est purement élastique (pas de glissement) avec une raideur K .
D'autre part, AB passe par A et B et donc les coordonnées de ces points vérifient son équation ; elle est de la forme :

$$Y_{AB} = K x_2 + A B_0$$

$$Y_{CD} = K x_2 - A B_0$$

Si $x_2 = A_2$ au point A nous avons :

$$k A_2 + (\tau - k d_0) = K A_2 + A B_0$$

$$A B_0 = A_2 (k - K) + (\tau - k d_0) \text{ avec } \tau = K d_0$$

d'où les équations :

$$Y_{AB} = K x_2 + (K - k) (d_0 - A_2) \quad (1)$$

$$Y_{CD} = K x_2 - (K - k) (d_0 - A_2) \quad (2) \quad (2,7)$$

2,22 Calcul de θ_2^*

Si l'on se reporte à la figure (2,2) et que l'on suppose le mouvement partant du point A , nous voyons que le point figuratif M sera sur le segment AB jusqu'à ce que $\theta_2 = \theta_2^*$ et ensuite passera sur le segment BC pour $\theta_2^* \leq \theta \leq \pi$. D'où l'importance de la connaissance de θ_2^* qui marque le changement de régime : passage de la phase de non glissement à la phase de glissement .

$$\cos \theta_2^* = \frac{x_B}{A_2} \quad (2.8)$$

Or le point B est à l'intersection des segments AB et CB et si l'on fait $Y_{AB} = Y_{CB}$, nous obtenons :

$$K x_B + (K - k) (d_0 - A_2) = k x_B - (K - k) d_0$$

$$x_B = A_2 - 2 d_0 \quad (2,9)$$

$$\text{d'où } \cos \theta_2^* = 1 - \frac{2 d_0}{A_2} \quad (2,10)$$

REMARQUE • Le cycle étant symétrique par rapport à l'origine, il est complètement défini , pour un frottement donné, par la connaissance de K et de A_2 , amplitude relative des deux masses .

2,3 Méthode de calcul

2,31 Principe de la méthode

Pour résoudre le système d'équations (2,4) régissant le mouvement, nous allons utiliser la méthode de variation des constantes de Krylov et Bogolioubov, dite également méthode de l'équilibre harmonique.

Par analogie avec l'étude des systèmes linéaires en régime permanent, nous cherchons des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= A_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2,11)$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega t - \varphi_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 - \varphi_2 \end{aligned} \quad (2,12)$$

Le déphasage φ_i est introduit pour que l'amplitude A_i soit positive. Dans le cas linéaire $\varphi_i = 0$ si $\omega < \omega_0$ et $\varphi_i = \pi$ si $\omega > \omega_0$.

Dans le cas non linéaire, la méthode consiste à conserver la même forme de réponse mais, cette fois, l'amplitude A_i et la phase φ_i sont considérées comme fonction du temps mais variant lentement.

$A_1, A_2; \varphi_1$ et φ_2 sont des fonctions lentement variables du temps.

2,32 Calcul

Dérivons les équations (2,11) par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\omega A_1 \sin \theta_1 + \frac{dA_1}{dt} \cos \theta_1 + A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega A_2 \sin \theta_2 + \frac{dA_2}{dt} \cos \theta_2 + A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2,13)$$

Nous supposons que la forme des vitesses $\frac{dy_1}{dt}$ et $\frac{dx_2}{dt}$ reste identique à celle qu'elles auraient dans le cas d'équation linéaire, de sorte que nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\omega A_1 \sin \theta_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega A_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2,14)$$

ce qui entraîne , d'après (2,13)

$$\frac{dA_1}{dt} \cdot \cos \theta_1 + A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \cos \theta_1 = 0 \quad (2,15)$$

$$\frac{dA_2}{dt} \cdot \cos \theta_2 + A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot \cos \theta_2 = 0$$

Compte tenu de cette hypothèse, les dérivées secondes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\omega^2 A_1 \cos \theta_1 - \omega \frac{dA_1}{dt} \sin \theta_1 + \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\omega^2 A_2 \cos \theta_2 - \omega \frac{dA_2}{dt} \sin \theta_2 + \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2,16)$$

Faisons $m = 1$ et substituons dans le système d'équation (2,4) $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$ et $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$ par leur valeur , il vient :

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 \cos \theta_1 - \omega \frac{dA_1}{dt} \sin \theta_1 + \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 + k y_1 - g_2(A_2; \theta_2) &= k r \cos (\theta + \varphi_1) \\ -\omega^2 A_2 \cos \theta_2 - \omega \frac{dA_2}{dt} \sin \theta_2 + \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 - k y_1 + 2g_2(A_2; \theta_2) &= -k r \cos (\theta_1 + \varphi_1) \end{aligned} \quad (2,17)$$

Ainsi le système d'équations différentielles du 2ème ordre (2,4) est remplacé par les systèmes à 2 équations du premier ordre (2,15) et (2,17) .

Ce système de quatre équations du premier ordre peut se simplifier par des combinaisons linéaires .

Effectuons les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Equation (2,15)} \times \omega \cos \theta_1 - \text{Equation (2,17)} \times \sin \theta_1 \\ \text{Equation (2,15)} \times \omega \sin \theta_1 + \text{Equation (2,17)} \times \cos \theta_1 \\ \text{Equation (2,15)} \times \omega \cos \theta_2 - \text{Equation (2,17)} \times \sin \theta_2 \\ \text{Equation (2,15)} \times \omega \sin \theta_2 + \text{Equation (2,17)} \times \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2,18)$$

Tout calcul effectué et après simplification, nous obtenons le système de 4 équations du premier ordre suivant :

$$\begin{aligned}
 (2,19) \quad & \omega \cdot \frac{dA_1}{dt} + \omega^2 A_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_1 - k y_1 \cdot \sin \theta_1 + g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_1 = -k r \cos(\theta_1 + \varphi_1) \cdot \sin \theta_1 \\
 & \omega \cdot A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \omega^2 A_1 \cdot \cos^2 \theta_1 + k y_1 \cos \theta_1 - g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_1 = k r \cdot \cos(\theta_1 + \varphi_1) \cos \theta_1 \\
 & \omega \cdot \frac{dA_2}{dt} + \omega^2 A_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_2 + k y_1 \sin \theta_2 - 2 g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 = k r \cos(\theta_1 + \varphi_1) \sin \theta_2 \\
 & \omega \cdot A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega^2 A_2 \cos^2 \theta_2 - k y_1 \cdot \cos \theta_2 + 2 g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 = k r \cdot \cos(\theta_1 + \varphi_1) \cos \theta_2
 \end{aligned}$$

Nous avons supposé, au début de cette étude, que les variables A_1 , A_2 ; φ_1 et φ_2 variaient lentement, aussi, peuvent-elles être remplacées, sur une période, par leurs valeurs moyennes respectives et, non plus, par leurs valeurs instantanées. Désormais, les symboles A_i et φ_i ne représenteront plus les valeurs instantanées des amplitudes et des phases mais leurs valeurs moyennes sur une période. Il en est de même pour $\frac{dA_i}{dt}$ et $\frac{d\varphi_i}{dt}$ qui représentent désormais les variations moyennes de A_i et φ_i sur une période.

Multiplions par $d\theta_i$ les équations (2,19) et intégrons de $[0; 2\pi]$ en tenant compte que par hypothèse :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A_1 \cdot \cos \theta_1 \\
 \varphi_1 &= \theta_2 + \varphi_2
 \end{aligned}$$

Nous obtenons, tout calcul fait, la nouvelle forme suivante du système d'équation (2,19)

$$\begin{aligned}
 2 \omega \cdot \frac{dA_1}{dt} + \frac{\cos \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cdot \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 + \frac{\sin \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cdot \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 &= E \sin \varphi_1 \\
 2 \omega \cdot A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \omega^2 A_1 + k A_1 - \frac{\cos \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 + \frac{\sin \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 &= E \cos \varphi_1 \\
 2 \omega \cdot \frac{dA_2}{dt} - k A_1 \cdot \sin \varphi_2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 &= -E \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\
 2 \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega^2 A_2 - k A_1 \cos \varphi_2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 &= -E \cos(\varphi_1 + \varphi_2)
 \end{aligned} \quad (2,20)$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 C_2(A_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cdot \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 \\
 S_2(A_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 \cdot d\theta_2
 \end{aligned} \quad (2,21)$$

Les équations (2,15) et (2,17) prennent finalement la forme suivante :

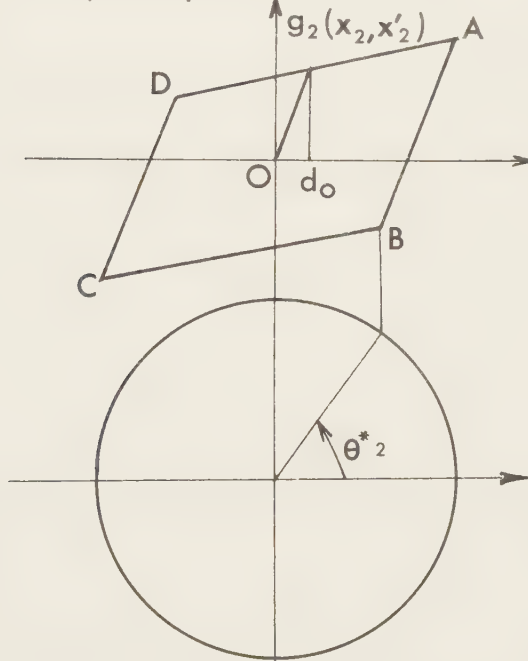
$$+ 2 \omega \cdot \frac{dA_1}{dt} + S_2(A_2) \cdot \cos \varphi_2 + C_2(A_2) \sin \varphi_2 = E \cdot \sin \varphi_1$$

$$- \omega^2 A_1 + 2 \omega A_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + k A_1 - C_2(A_2) \cos \varphi_2 + S_2(A_2) \sin \varphi_2 = E \cos \varphi_1 \quad (2,22)$$

$$+ 2 \omega \cdot \frac{dA_2}{dt} - k A_1 \sin \varphi_2 - 2 S_2(A_2) = -E \sin (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$- \omega^2 A_2 + 2 \omega A_2 \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} - k A_1 \cdot \cos \varphi_2 + 2 C_2(A_2) = -E \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$

2,4 Expression de $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$



2,41 Calcul de $S_2(A_2)$

Reprenons le cycle fermé défini au paragraphe (2,2) de notre exposé .

Ce cycle représente $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ en fonction de l'amplitude A_2 atteinte et, donc, est complètement déterminé par la connaissance des équations de ses différents éléments . Connaissant $g_2(A_2, \theta_2)$ nous pouvons calculer les intégrales définissant $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$.

D'autre part, du fait de la symétrie du cycle, il suffit, pour le calcul de $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$, d'effectuer le calcul d'intégration sur une demi-période .

Par définition, nous avons posé :

$$S_2(A_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 \cdot d\theta_2$$

ou encore
$$S_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_2^*} g_2(A_2; \theta_2) \cdot \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 + \int_{\theta_2^*}^{\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cdot \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 \right]$$

Or, $g_2(A_2; \theta_2)$ de $[0; \theta_2^*]$ est représenté par le segment AB ayant pour équation, d'après le paragraphe (2,2)

$$Y_{AB} = K x_2 + (K - k) (d_0 - A_2)$$

et $g_2(A_2; \theta_2)$ de $[\theta_2^*; \pi]$ est représenté par le segment BC ayant pour équation :

$$Y_{BC} = k x_2 - (K-k) d_0 \quad \text{avec par hypothèse : } x_2 = A_2 \cos \theta_2$$

d'où :

$$S_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\theta_2^*} [K A_2 \cos \theta_2 + (K-k)(d_0 - A_2)] \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 \right. \\ \left. + \int_{\theta_2^*}^{\pi} [k A_2 \cos \theta_2 - (K-k) \cdot d_0] \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 \right]$$

Intégrons; il vient :

$$S_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{K \cdot A_2}{4} [\cos 2\theta_2^* - 1] - (K-k)(d_0 - A_2)(1 - \cos 2\theta_2^*) + \frac{k \cdot A_2}{4} [\cos 2\theta_2^* - 1] - (K-k)d_0(1 + \cos 2\theta_2^*) \right]$$

Or, d'après le paragraphe (2,2) nous avons :

$$\cos \theta_2^* = 1 - \frac{2d_0}{A_2} \quad \text{avec } \cos 2\theta_2^* = 1 - 2 \sin^2 \theta_2^*$$

d'où :

$$S_2(A_2) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{A_2 \cdot (K-k)}{2} \sin^2 \theta_2^* - \frac{4d_0 \cdot (K-k)}{A_2} (A_2 - d_0) \right] \quad (2,23)$$

Soit finalement, en remplaçant $\sin^2 \theta_2^*$ par $(1 - \cos^2 \theta_2^*)$

$$S_2(A_2) = -\frac{4}{\pi} \left[(K-k) (A_2 - d_0) \cdot \frac{d_0}{A_2} \right] \quad \text{pour } A_2 > d_0 \quad (2,24)$$

Si $A_2 \leq d_0$, nous avons $g_2(A_2; \theta_2) = K x_2 = K A_2 \cdot \cos \theta_2$

$$S_2(A_2) = \int_0^{\pi} K A_2 \cdot \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 = 0$$

$$S_2(A_2) = 0 \quad \text{pour } A_2 \leq d_0 \quad (2,25)$$

2,42 Calcul de $C_2(A_2)$

Par définition et par analogie avec le calcul de $S_2(A_2)$, nous avons :

$$C_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_2^*} g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 + \int_{\theta_2^*}^{\pi} g(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 \right]$$

ou, en remplaçant $g(A_2; \theta_2)$ sur $[0; \theta_2^*]$ et sur $[\theta_2^*; \pi]$ par sa valeur (paragraphe 2,2) nous obtenons :

$$C_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_2^*} [K A_2 \cos \theta_2 - (K-k)(A_2 - d_0)] \cos \theta_2 d\theta_2 \right. \\ \left. + \int_{\theta_2^*}^{\pi} [k A_2 \cos \theta_2 - d_0(K-k)] \cos \theta_2 d\theta_2 \right]$$

Après intégration :

$$C_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \left[A_2(K-k) \cdot \frac{\theta_2^*}{2} + k \cdot \pi \cdot \frac{A_2}{2} + (K-k) \frac{A_2}{4} \cdot \sin 2\theta_2^* - (K-k)(A_2 - 2d_0) \sin \theta_2^* \right]$$

$$\text{Or } \cos \theta_2^* = \left(1 - \frac{2d_0}{A_2}\right)$$

d'où :

$$C_2(A_2) = \frac{A_2}{\pi} \cdot \left[(K-k) \left(\theta_2^* - \frac{\sin 2\theta_2^*}{2} \right) + k \pi \right] \quad \text{pour } A_2 > d_0 \quad (2,26)$$

Soit encore en fonction de A_2

$$C_2(A_2) = \frac{A_2}{\pi} \cdot \left[(K-k) \cdot \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2d_0}{A_2} \right) - \frac{(A_2 - 2d_0)}{A_2^2} \cdot \sqrt{A_2 d_0 - d_0^2} + k \pi \right] \quad (2,27)$$

Si $A_2 \leq d_0$, nous avons $g_2(A_2; \theta_2) = K x_2 = K A_2 \cos \theta_2$

$$\text{d'où : } C_2(A_2) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} K A_2 \cos^2 \theta_2 d\theta_2 = K A_2$$

$$C_2(A_2) = K A_2 \quad \text{pour } A_2 \leq d_0 \quad (2,28)$$

En remplaçant $S_2(A_2)$ et $C_2(A_2)$ par leurs valeurs dans le système d'équation (2,22) dans le domaine de la validité de la méthode, ces quatre équations répondent à notre problème où les inconnues sont A_1 ; A_2 ; φ_1 et φ_2 .

2.5 - Etude du mouvement en régime permanent

2,51 Equations particulières

Lorsque le régime permanent est établi, c'est-à-dire que tout transitoire a disparu, l'amplitude et la phase restent constantes, de sorte que nous avons :

$$\frac{dA_i}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = 0 \quad (2,29)$$

Adoptons l'indice «0» pour montrer qu'il s'agit du régime permanent .

Compte tenu de (2,29) le système (2,22) s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{20}(A_{20}) \cos \varphi_{20} + C_{20}(A_{20}) \sin \varphi_{20} &= E \sin \varphi_{10} \\ -\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20}(A_{20}) \cos \varphi_{20} + S_{20}(A_{20}) \sin \varphi_{20} &= E \cos \varphi_{10} \quad (2,30) \\ -k A_{10} \sin \varphi_{20} - 2S_{20} &= -E \sin (\varphi_{10} + \varphi_{20}) \\ -\omega^2 A_{20} - k A_{10} \cos \varphi_{20} + 2C_{20} A_{20} &= -E \cos (\varphi_{10} + \varphi_{20}) \end{aligned}$$

En éliminant φ_{10} et φ_{20} dans les équations (2,30) nous pouvons nous ramener à un système à 2 équations .

Elevons les deux équations (2,30 1) et (2,30 2) au carré et faisons la somme membre à membre :

$$\begin{aligned} E^2 &= S_{20}^2 + C_{20}^2 + \omega^4 A_{10}^2 + 2\omega^2 A_{10} C_{20} \cos \varphi_{20} + k^2 A_{10}^2 - 2\omega^2 A_{10}^2 k \\ &\quad - 2\omega^2 A_{10} S_{20} \sin \varphi_{20} - k A_{10} C_{20} \cos \varphi_{20} + 2k A_{10} S_{20} \sin \varphi_{20} \end{aligned}$$

ou encore tous calculs faits :

$$(2,31) \quad E^2 = S_{20}^2 + C_{20}^2 + (\omega^2 A_{10} - k A_{10})^2 + (C_{20} \cos \varphi_{20} - S_{20} \sin \varphi_{20})(2\omega^2 A_{10} - 2k A_{10})$$

Effectuons maintenant le rapport membre à membre des équations (2,301) et (2,302) nous obtenons des relations définissant φ_{10} .

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_{10} &= \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}} \quad \text{et} \\ \cos \varphi_{10} &= \frac{-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}}{E} \\ \sin \varphi_{10} &= \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{E} \end{aligned} \quad (2,32)$$

Remplaçons les valeurs de $\cos \varphi_{20}$ et $\sin \varphi_{10}$ par leurs valeurs dans les équations (2,303) et (2,304) ; il vient :

$$\begin{aligned} -k A_{10} \sin \varphi_{20} - 2S_{20} &= -E \left[\frac{\cos \varphi_{20}}{E} (S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}) + \frac{\sin \varphi_{20}}{3} (-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}) \right] \\ -\omega^2 A_{20} - k A_{10} \cos \varphi_{20} + 2C_{20} &= -E \left[\frac{\cos \varphi_{20}}{E} (-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \varphi_{20}}{E} (S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}) \right] \end{aligned}$$

d'où, finalement, tous calculs faits, les relations :

$$\sin \varphi_{20} = \frac{-S_{20}}{A_{10} \omega^2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi_{20} = \frac{-\omega^2 A_{20} + C_{20}}{A_{10} \omega^2} \quad (2,33)$$

Si, maintenant, nous faisons $\cos^2 \varphi_{20} + \sin^2 \varphi_{20} = 1$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\omega^4 [A_{10}^2 - A_{20}^2] + 2C_{20}A_{20}\omega^2 - S_{20}^2 - C_{20}^2 = 0 \quad (2,34)$$

Equation du second degré en ω^2 qui possède les racines suivantes si $A_2 \neq A_1$

$$\omega^2 = \frac{-C_{20}A_{20} \pm \sqrt{C_{20}^2 A_{20}^2 + (S_{20}^2 + C_{20}^2)(A_{10}^2 - A_{20}^2)}}{A_{10}^2 - A_{20}^2} \quad (2,35)$$

C'est une première équation à deux inconnues A_1 et A_2 , la deuxième étant obtenue en remplaçant $\cos \varphi_{20}$ et $\sin \varphi_{20}$ par leur valeur dans (2,31)

$$E^2 = 3S_{20}^2 + 3C_{20}^2 + (\omega^2 A_{10} - k A_{10})^2 + 2C_{20}A_{20}(k - \omega^2) - \frac{2k}{\omega^2} (C_{20}^2 + S_{20}^2) \quad (2,36)$$

2,52 Exploitation des équations

Les équations (2,35) et (2,36) définissent complètement le mouvement permanent, les inconnues étant A_1 et A_2 , E et ω étant des paramètres que l'on se donne. Aussi, par une méthode de calcul appropriée, on pourrait calculer A_1 et A_2 à partir de ces deux équations; nous obtiendrions ainsi les courbes de réponse de cette chaîne $A_i = f(\omega)$. La comparaison de ces courbes avec les courbes expérimentales, nous montrerait l'approximation de notre méthode approchée. Cependant, la comparaison la plus importante est celle qui se situe autour de la résonance de phase, ou d'amplitude car c'est pour la résonance d'amplitude que la structure étudiée aura à subir les plus fortes sollicitations. Aussi, nous bornerons-nous, dans cette étude, à la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux autour de la seule résonance de phase et d'amplitude, ce qui nous permettra donc de voir la validité de notre méthode dans la zone la plus préoccupante.

2,6 Etude à la résonance de phase

Dans le paragraphe (2,5) nous avons établi que dans le cas général et en régime permanent, $\tan \varphi_{10}$ peut s'écrire :

$$\tan \varphi_{10} = \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}}$$

A la résonance de phase, nous avons, par définition $\varphi_{10} = -\frac{\pi}{2}$, ce qui se traduit par

$\text{tg } \varphi_{10} = \infty$, c'est-à-dire :

$$-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20} = 0 \quad (2,37)$$

D'autre part, nous avons $\varphi_{20} = 0$ ou $\varphi_{20} = \pi$, soit $\cos \varphi_{20} = \pm 1$

L'équation 2,37 nous donne donc la pulsation de résonance de phase

$$\omega_{oi.r}^2 = \frac{k A_{10} \mp C_{20}}{A_{10}} \quad (2,38)$$

Ecrivons cette équation sous une autre forme :

$$\omega_{oi.r}^2 = k \mp N \cdot \frac{C_{20}}{A_{20}} \quad (2,39)$$

$$\text{avec } N = \frac{A_{20}}{A_{10}} \quad i = 1; 2$$

Les expressions (2,38) et (2,39) nous montrent que la pulsation de résonance de phase varie en fonction de l'amplitude des paramètres .

Reprenons l'équation (2,31) et faisons $\varphi_{20} = 0$, il vient :

$$E^2 = S_{20}^2 + C_{20}^2 + (\omega^2 A_{10} - k A_{10})^2 + (\pm C_{20})(2\omega^2 A_{10} - 2k A_{10}) \quad (2,40)$$

D'où une nouvelle expression de ω_b^2

Tous calculs faits, on trouve :

$$\omega^2 = k \mp \frac{C_{20}}{A_{10}} \pm \left[(k A_{10} \mp A_{10} C_{20})^2 - A_{10}^2 (S_{20}^2 + C_{20}^2 - E^2 \mp 2k A_{10} C_{20}) \right]^{1/2} \quad (2,41)$$

Par définition, il y aura résonance d'amplitude pour $[\dots]^{1/2} = 0$. D'où la pulsation à la résonance d'amplitude :

$$\omega_{oi.r.a} = k \mp \frac{C_{20}}{A_{10}} \quad (2,42)$$

Ce qui nous montre que la résonance d'amplitude est strictement confondue avec la résonance de phase.

Aussi, si nous faisons varier A_{20} , nous obtenons une courbe $A_{20} = f(\omega)$ qui sera le lieu des points où il y aura résonance de phase d'amplitude dans le plan (A_{20}, ω) . On peut dire que chaque point de courbe correspond à une résonance de phase et d'amplitude bien déterminée par les valeurs relatives de l'amplitude d'excitation et de la force de frottement et, en particulier, comme nous le montrons dans un autre paragraphe, à leurs rapports .

2,7 Courbe « squelette »

La courbe $A_2 = f(\omega)$ définie au paragraphe précédent donne « l'allure » générale de la courbe de résonance qui, d'après l'équation (2,41), se situe de part et d'autre de la courbe $A_2 = f(\omega)$ et d'une manière symétrique tout en situant son maximum en amplitude et en fréquence ; cette courbe donne donc déjà une idée précise de la courbe de réponse, d'où le vocable de « courbe squelette » et tout l'intérêt de son étude.

Cette courbe a pour équation $\omega_{oi}^2 = k \mp N \cdot \frac{C_{20}}{A_{20}}$ et donc, pour la tracer, il nous faut étudier la valeur que prend N en fonction de A_2 .

2,71 Recherche de la valeur du rapport $N = \frac{A_{20}}{A_{10}}$

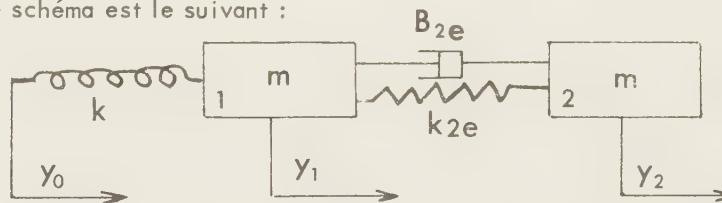
2,711 Calcul direct

Théoriquement 2,35 nous donne ω^2 en fonction de N et de A_2 et l'équation (2,36) nous donne E en fonction également de N et de A_{20} ; aussi, pour un ω^2 donné, nous pouvons donc théoriquement avoir les valeurs de N et de A_2 correspondantes. En fait, les relations entre N et A_2 sont très compliquées, leur caractère transcendant nous empêche d'avoir N en fonction de A_2 d'une manière exacte ; aussi, allons-nous chercher une autre méthode de recherche de N en fonction de A_2 .

2,712 Calcul indirect

Soit une force de frottement donnée ainsi qu'une amplitude d'excitation ; pour une pulsation ω_{r1} , il y aura résonance de phase et d'amplitude et le point figuratif appartiendra donc à la courbe squelette, et à ce moment là, tout se passe comme si l'on avait un système possédant une certaine raideur équivalente K_{2e} et un amortissement équivalent B_{2e} .

Le schéma est le suivant :



Pour connaître le rapport $N = \frac{x_2}{y_1}$ d'un tel système ($x_2 = y_2 - y_1$) il nous faut calculer les vecteurs propres du système conservatif associé de raideur d'entrée k et K_{2e} de raideur inter-masses. La distribution des masses restant inchangée le rapport $N = \frac{x_2}{y_1}$ en présence de l'amortisseur B_{2e} restera identique au rapport du système conservatif associé, qu'il nous faut donc déterminer.

2,7121 Formes propres du système conservatif

a) Fréquences propres

Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + (K_{2e} + k) y_1 - K_{2e} y_2 &= k y_0 \cos \omega t \\ m \ddot{y}_2 + K_{2e} y_1 + K_{2e} y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2,43)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + K_{2e} & -K_{2e} \\ -K_{2e} & K_{2e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t \quad (2,44)$$

Les valeurs propres sont données par :

$$\det. (K - \lambda M) = 0 = m^2 \left[\lambda^2 - \lambda \left(\frac{2K_{2e} + k}{m} \right) + \frac{K_{2e} \cdot k}{m^2} \right] = 0 \quad (2,45)$$

dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2K_{2e} + k \pm \sqrt{4K_{2e}^2 + k^2}}{2m} \quad (2,46)$$

b) Vecteurs propres

Ils sont déterminés par l'équation

$$[K - \lambda_i M] [Z_i] = 0 \quad (2,47)$$

Le premier vecteur propre a pour composantes :

$$\begin{aligned} z_{11} &= 1 \\ z_{21} &= \frac{k}{2K_{2e}} + \frac{\sqrt{4K_{2e}^2 + k^2}}{2K_{2e}} \end{aligned} \quad (2,48)$$

Or,

$$A_{21} = z_{21} - z_{11} \quad \text{et} \quad N = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$N_{01} = \frac{k + \sqrt{4K_{2e}^2 + k^2}}{2K_{2e}} - 1 \quad (2,49)$$

et le deuxième vecteur propre

$$z_{12} = 1$$

$$z_{22} = \frac{k - \sqrt{4 K_{2e}^2 + k^2}}{2 K_{2e}} \quad \text{d'où} \quad N_{02} = \frac{k - \sqrt{4 K_{2e}^2 + k^2}}{2 K_{2e}} - 1 \quad (2,50)$$

Telles sont les valeurs littérales de $N_{0i,ri}$ en fonction de K_{2e} , raideur équivalente du système ayant une résonance de phase et d'amplitude pour $\omega = \omega_{r,i}$

2,713 Recherche de la raideur équivalente K_{2e}

Pour cela considérons le système précédent avec une raideur K_{2e} et un coefficient d'amortissement B_{2e} . Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 &= -k(y_1 - y_0) - K_{2e}(y_1 - y_0) - B_{2e}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\ m \ddot{y}_2 &= -K_{2e}(y_2 - y_1) - B_{2e}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \end{aligned} \quad (2,51)$$

Soit encore

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + k y_1 - K_{2e} x_2 - B_{2e} \dot{x}_2 &= k y_0 \\ m \ddot{y}_2 + K_{2e} x_2 + B_{2e} \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2,52)$$

Si nous comparons ce système d'équations au système (2,2) du paragraphe (2,1) nous voyons qu'il suffit de remplacer $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ par :

$$g_2(x_2; \dot{x}_2) = K_{2e} x_2 + B_{2e} \dot{x}_2 \quad (2,53)$$

ceci dans les différentes équations du paragraphe (2,1) et (2,3) et, en particulier, si nous remplaçons dans les équations (2,21) $g_2(x_2; \dot{x}_2)$ par sa valeur, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} C_2(A_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \cos \theta_2 d\theta_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (K_{2e} x_2 + B_{2e} \dot{x}_2) \cos \theta_2 d\theta_2 \\ S_2(A_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(A_2; \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (K_{2e} x_2 + B_{2e} \dot{x}_2) \sin \theta_2 d\theta_2 \end{aligned} \quad (2,54)$$

Avec $x_2 = A_2 \cos \theta_2$ et $\theta_2 = \theta_1 - \varphi_2$, il vient :

$$C_2(A_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{2e} A_2 \cos^2 \theta_2 d\theta_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -B_{2e} \omega A \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\theta_2$$

$$\text{d'où : } C_2(A_2) = K_{2e} A_2 \quad \text{ou} \quad K_{2e} = \frac{C_2(A_2)}{A_2} \quad (2,55)$$

De même

$$S_2(A_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{2e} A_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 d\theta_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -B_{2e} A \omega \sin^2 \theta_2 d\theta_2$$

$$\text{d'où : } S_2(A_2) = -B_{2e} \omega A_2 \quad \text{ou} \quad B_{2e} = -\frac{S_2(A_2)}{\omega A_2} \quad (2,56)$$

2,714 Equation finale des courbes squelettes

Rappelons l'équation sous la forme (2,39)

$$\omega_{oi}^2 = k \mp N \cdot \frac{C_{20}}{A_{20}}$$

$$\text{Avec } \mp N = \frac{k \pm \sqrt{4 K_{2e}^2 + k^2}}{2 K_{2e}} - 1$$

et, de plus, d'après (2,26) nous avons :

$$C_2(A_2) = \frac{A_2}{\pi} \left[(K-k) \left(\theta_2^* - \frac{\sin 2 \theta_2^*}{2} \right) + k \pi \right]$$

$$\text{d'où : } \frac{C_2(A_2)}{A_2} = \frac{1}{\pi} \left[(K-k) \left(\theta_2^* - \frac{\sin 2 \theta_2^*}{2} \right) + k \pi \right] = K_{2e} \quad (2,57)$$

$$\text{d'où : } \omega_{oi}^2 = \frac{k}{2} \mp \frac{\sqrt{4 K_{2e}^2 + k^2}}{2} + \frac{C(A)}{A} \quad (2,58)$$

Valeurs limites de ω_{oi}^2

a) Frottement très faible : $\tau \Rightarrow 0$

ce qui se traduit par : $d_0 = \frac{\tau}{K}$ « petit » et $\frac{d_0}{A_2} \Rightarrow 0$

Or $\cos \theta_2^* = \left(1 - \frac{2 d_0}{A_2} \right)$ donc $\cos \theta_2^* \Rightarrow 1$
si $d_0 \Rightarrow 0$

et $\theta_2^* \Rightarrow 0$ d'où $\sin 2 \theta_2^* \Rightarrow 0$

$$\text{et par suite : } \frac{C(A)}{A} = K_{2e} = \frac{1}{\pi} \left[(K-k)(\rightarrow 0) + k \pi \right] = k \quad (2,59)$$

$$\text{d'où : } \omega_{oi}^2 = k \cdot \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} \quad \tau \rightarrow 0 \quad (2,60)$$

qui sont les pulsations propres du système linéaire sans amortissement avec une raideur inter-masses k .

b) Frottement fort : $\tau \rightarrow \infty$

ce qui se traduit par d_0 « grand » ($d_0 = \frac{\tau}{K}$) et donc $A_2 \rightarrow d_0$, ce qui revient à dire que $\cos \theta_2^* = (1 - \frac{2d_0}{A^2}) \rightarrow -1$ c'est-à-dire qu'il n'y aurait plus glissement et que

$$\theta_2^* = \pi \text{ et } \sin 2\theta_2^* = 0$$

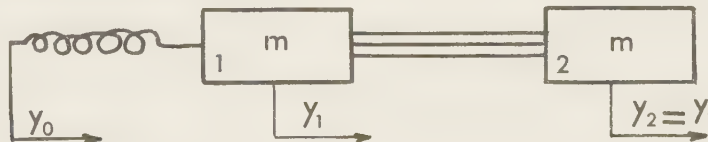
$$\text{d'où } \frac{C(A)}{A} = K_{2e} = -\frac{1}{\pi} [(K-k) \cdot \pi + k\pi] = K \quad (2,61)$$

$$\text{d'où : } \omega_{oi}^2 = \frac{k}{2} \mp \frac{\sqrt{4K^2 + k^2}}{2} + K \quad (2,62)$$

REMARQUE • Si, comme cela est le cas dans notre dispositif expérimental, K est grand devant k , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \omega_{o1}^2 &\rightarrow \frac{k}{2m} & \text{et} & & \omega_{o2}^2 &\rightarrow 2K & (\text{très grand}) \\ K &\gg k & & & K &\gg k \end{aligned} \quad (2,63)$$

$\omega_{o1}^2 = \frac{k}{2m}$ correspond à la pulsation propre d'un système de raideur d'entrée k et de masse $2m$, c'est-à-dire au système primitif à 2 degrés où l'on aurait effectué le verrouillage du 2ème degré de liberté ; le schéma serait le suivant :



De ce fait $\omega_{o2}^2 \rightarrow \infty$ et le comportement pratique du système serait celui d'un système linéaire à 1 seul degré de liberté sans amortissement. Aussi, assiste-t-on à la disparition « pratique » (mais non théorique) du deuxième mode propre de vibration.

2,8 Considération d'énergie

2,81 Expression de l'énergie fournie

L'énergie est fournie par l'excitation déplacement $y = r \cos \omega t$ ($r = c^{\text{te}}$ réglable pouvant prendre une valeur quelconque)

Le travail élémentaire s'écrit :

$$d\mathcal{E} = E \cdot dy_1 = E \frac{dy_1}{dt} \cdot dt \quad (2,63)$$

$$\text{Or,} \quad E = k r \cdot \cos \omega t$$

$$\text{et} \quad y_1 = A_1 \cos \theta_1 \quad \dot{y} = -\omega A_1 \sin \theta_1 \quad \text{avec} \quad \theta_1 = \omega t - \varphi_1$$

d'où l'énergie fournie par cycle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_f &= \int_{t_1}^{t_1+T} E \cdot \dot{y}_1 \cdot dt = -kr \omega A_1 \int_{t_1}^{t_1+T} \cos \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi_1) dt \\ \mathcal{E}_f &= \pi \cdot k \cdot r \cdot A_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (2,64)$$

Si nous nous plaçons à la résonance de phase, nous avons vu, au paragraphe (2,6), que $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\sin \varphi_1 = 1$, d'où la valeur de l'énergie fournie à ladite résonance :

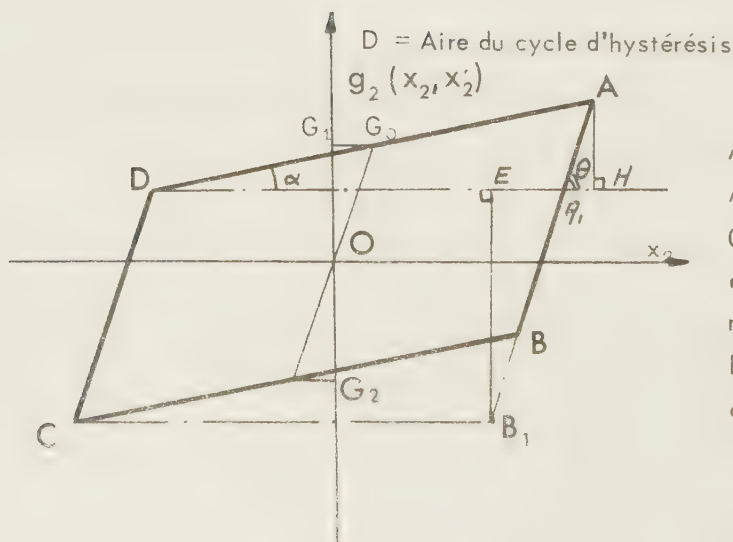
$$\mathcal{E}_{f_r} = \pi \cdot k r \cdot A_1 \quad (2,65)$$

2,82 Expression de l'énergie dissipée par frottement lors du glissement

D'une manière générale et par définition, l'énergie dissipée par cycle s'écrit :

$$\begin{aligned} D &= \int_{t_1}^{t_1+T} \text{Force d'amortissement} \cdot dx \\ D &= \int_{t_1}^{t_1+T} \text{Force d'amortissement} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_1+T} g(x_2, \dot{x}_2) \dot{x}_2 \cdot dt \end{aligned}$$

et, en définitive :



Aire ABCD = Aire $A_1 B_1 CD$
 Aire $A_1 B_1 CD = DA_1 \cdot B_1 E$
 Or $B_1 E = G_1 G_2 = 2 OG_1$
 et d'après le paragraphe (2,2)
 nous savons que $OG_1 = \tau$
 D'autre part $DA_1 = DH - A_1 H$
 avec $DH = x(A) - x(D)$

Or, d'après (2,2) $x(A) = A_2$
 $x(D) = -A_2 + 2 d_0$

d'où : $DH = 2 (A_2 - d_0)$

$$HA_1 = \frac{AH}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{AH}{K} \quad \operatorname{tg} \theta = K$$

mais $AH = DH \operatorname{tg} \alpha = 2 (A_2 - d_0) \cdot k \quad \operatorname{tg} \alpha = k$

d'où l'Aire : $\mathcal{A} = 4 (A_2 - d_0) \left(1 - \frac{k}{K}\right) \tau$

Soit l'expression suivante pour l'énergie dissipée par cycle

$$D = 4 (A_2 - d_0) (K - k) d_0 \quad (2,66)$$

REMARQUE - Pour le cycle dynamique, à frottement constant, le point G_0 est fixe et la distance entre les droites DA et CB l'est également. L'Aire ABCD, donc l'énergie dissipée par cycle, ne varie qu'en fonction de la longueur $DA = CB$ c'est-à-dire en définitive de A_2 . Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que τ , force qui provoque le glissement, reste constante, c'est-à-dire que f coefficient de frottement est constant, ce qui n'est certainement pas rigoureusement exact, car f dépend de l'amplitude A_2 et surtout de la vitesse de glissement $\frac{dA_2}{dt}$.

2,83 Bilan Energétique

2,831 Equation

En dehors des frotteurs, le système est purement élastique, aussi, en première approximation, peut-on dire que l'énergie fournie est entièrement absorbée par les frotteurs et ceci est vrai quelle que soit la fréquence et, en particulier, à la résonance de phase et d'amplitude où nous pouvons écrire :

$$\mathcal{E} f_r = D \quad (2,67)$$

ou d'une manière explicite

$$\pi E A_1 = 4 (A_2 - d_0) (K - k) d_0$$

Or, nous avons posé (équation (2,39)) $\frac{A_2}{A_1} = N_i$ d'où $A_1 = \frac{A_2}{N_i}$

D'autre part, en coordonnées réduites : $A_2 = a_2 \cdot d_0$; $d_0 = \frac{\tau}{K}$

L'équation précédente s'écrit donc :

$$\pi E \cdot d_0 \cdot \frac{a_2}{N} = 4 (K - k) d_0^2 a_2 - 4 (K - k) d_0^2$$

ou, en faisant apparaître le rapport $\frac{E}{\tau} = \mathfrak{R}$, il vient :

$$\mathfrak{R}_i = \frac{E}{\tau} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K-k}{K} \cdot \frac{a_2-1}{a_2} \cdot N_i(a_2) \quad (2,68)$$

Cette équation nous montre que $\mathfrak{R} = \frac{E}{\tau}$, qui est le rapport de la force d'excitation sur la force de frottement, est lié d'une manière unique avec a_2 , ce qui veut dire que pour un rapport $\mathfrak{R}_0$ fixé à l'avance, il y correspondra une valeur et une seule de a_2 .

$$2,832 \quad \text{Courbes} \quad \mathfrak{R}_i = \frac{E}{\tau} = f(a_2) \quad - \text{graphes}$$

Pour tracer le graphe de ces courbes voyons les valeurs limites et la variation globale .

quand $a_2 \rightarrow \infty \quad \mathfrak{R}_i \rightarrow \mathfrak{R}_{i\infty} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(K-k)}{K} \cdot N_i(a_2, \infty)$ ce qui veut dire que si $\mathfrak{R} \geq \mathfrak{R}_{i\infty}$ nous aurons des amplitudes infinies et aux fréquences propres du système conservatif .

Pour le fondamental

Pour le 2^{ème} mode

$$\mathfrak{R}_{1\infty} = \mathfrak{R}_{1\text{lim}} = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{K-k}{K} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \quad \mathfrak{R}_{2\text{lim}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K-k}{K} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \quad (2,69)$$

On remarque que la limite $\mathfrak{R}_{2\text{lim}} > \mathfrak{R}_{1\text{lim}}$, ce qui veut dire que le 2^{ème} mode est amorti par un frottement bien plus faible pour une excitation donnée .

D'autre part, pour $a_2=1 \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = 0$, d'où le tracé des graphes

2,833 Interprétation théorique de ces graphes

Ces graphes nous montrent que pour des rapports $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ fixés à l'avance, il en découle d'une manière unique des amplitudes $a_{21,1}$ et $a_{22,1}$ correspondant à $\mathfrak{R}_1$ et $a_{21,2}$; $a_{22,2}$ correspondant à $\mathfrak{R}_2$. Or, nous connaissons les pulsations propres du système en fonction de a_{2i} et donc, puisque a_{2i} est déterminé uniquement par le rapport $\mathfrak{R}_i$, nous avons les pulsations propres en fonction de $\mathfrak{R}_i$. Aussi, chaque point des courbes squelettes représente-t-il un rapport $\mathfrak{R}_i$ bien déterminé et, par simple connaissance de ce rapport, on peut, à l'aide des courbes squelettes, donner une idée précise de la courbe de réponse .

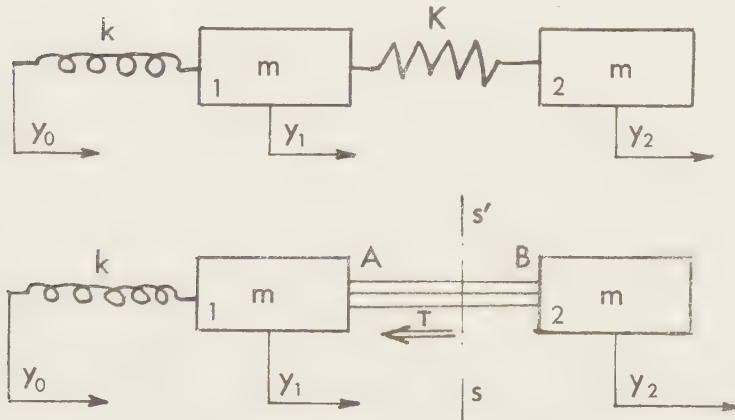
D'autre part, on constate que a_{22} diminue très rapidement et tend vers $1^+ \epsilon$ (ε petit) alors que a_{21} diminue progressivement en fonction de $\mathfrak{R}$.

Pratiquement, si $\mathfrak{R}$ diminue, soit que E décroît, soit que τ croît, on assiste à une quasi disparition du 2ème mode propre, tandis que le fondamental est conservé avec une résonance de plus en plus faible en coordonnées réduites et en déplacement de la fréquence de résonance vers les « hautes fréquences ».

2,84 Précision apportée à la courbe de réponse

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que les courbes squelettes nous donnent une idée générale de la courbe de réponse globale en fixant, en particulier, le point de résonance de phase et d'amplitude en fréquence et en amplitude. Nous allons ici apporter une précision complémentaire importante en fixant, sur la courbe de réponse, le point de début et de fin de glissement, point qui marque le passage de régime linéaire en régime non linéaire.

Tant qu'il n'y a pas glissement, le schéma est le suivant :



Dans le cas expérimental, K est très grand devant k et, en valeur absolue aussi, en première approximation, peut-on dire qu'il y a verrouillage entre les masses (1) et (2) tant qu'il n'y a pas glissement ; le schéma est alors le suivant :

ce qui se traduit par :

$y_1 \equiv y_2$ tant qu'il n'y a pas glissement.

Nous avons alors un système à "un" degré de liberté.

Faisons une section $s-s'$ dans la barre AB et calculons la tension T qu'elle supporte en dynamique.

$$\text{On peut écrire : } m \ddot{y}_2 = -T = m \ddot{y}_1 = m \ddot{y}_{1,2} \quad (2,70)$$

et ceci s'il n'y a pas glissement c'est-à-dire si $T < \tau$, force de frottement.

Nous voyons donc que l'on peut définir deux zones de fonctionnement :

$$\text{si } \tau > |m \ddot{y}_2| \quad (2,70) \quad \text{ou} \quad \tau < |m \ddot{y}_2|$$

système conservatif
linéaire

système à 2 degrés avec glissement
non linéaire

$$\tau = |m \ddot{y}_2| \quad \text{marque le point de changement de régime.}$$

Calcul de T tension dans la barre AB

Compte tenu des hypothèses, nous considérerons que le système est à 1 seul degré de masse 2m ; dans ces conditions, l'amplitude s'écrit :

$$y_{(1)(2)} = \frac{E_0}{k} \cdot \frac{1}{1-2r^2} \sin \omega t \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où :

$$\ddot{y}_{(1)(2)} = -\frac{E_0}{k} \cdot \frac{\omega^2}{1-\frac{2\omega^2}{\omega_0^2}} \sin \omega t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et

$$m \ddot{y}_{(1)(2)} = -E_0 \cdot \frac{r^2}{1-2r^2} \sin \omega t$$

Il y aura glissement si

$$|T| = m \ddot{y}_{(1)(2)} = \tau = E_0 \cdot \left| \frac{r^2}{1-2r^2} \right| \sin \omega t$$

ou en fonction du rapport $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_g = \frac{E_0}{\tau} = \frac{1-2r^2}{r^2} \quad (2,71)$$

La courbe $\mathfrak{R}_g = \frac{1-2r^2}{r^2}$ sépare le plan en 2 zones là où le système est couplé (sensiblement à 1 degré de liberté) et là où le système est découplé et donc à 2 degrés de liberté avec frottement de Coulomb. Ceci nous permet donc de déterminer 2 points complémentaires de la courbe de réponse, le point de début de glissement et le point de fin de glissement.

REMARQUE - Ceci est valable, quelle que soit la valeur de K car on peut toujours calculer $m \ddot{y}_2$

2,85 Variations de A_2 et A_1 en fonction de $\mathfrak{R}$

Nous avons posé précédemment $\frac{A_2}{A_1} = N$ et $A_2 = d_0 a_2$,
soit $a_2 = \frac{A_2}{d_0} = \frac{K}{\tau} \cdot A_2$. Or, d'après les courbes précédentes, nous avons $a_{2i} = f\left(\frac{E}{\tau}\right)$

d'où A_2 et A_1 .

D'autre part, par définition $\mathfrak{R} = \frac{E}{\tau}$ et donc étudier $A_i = \Gamma(\mathfrak{R})$ revient à étudier
 $A_i = \Gamma\left(\frac{E}{\tau_0}\right)$ ($\mathfrak{R}$ variant dans ce cas avec E variable et $\tau = \tau_0 = C^{te}$) ou $A_i = \Gamma\left(\frac{E_0}{\tau_v}\right)$

($\mathfrak{R}$ variant avec τ variable et $E = E_0 = C^{te}$)

2,851 Etude de $A_i = \Gamma \left(\frac{E_v}{\tau_0} \right)$

a) Equations :

Reprenons l'équation

$$\Re = \frac{E}{\tau} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(K-k)}{K} \cdot \frac{(a_{2i}-1)}{a_{2i}} \cdot N_i(a_2)$$

Posons $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{(K-k)}{K} = \alpha$, il vient alors

$$a_{2i} = \frac{\alpha \tau_0}{\alpha N_i \tau_0 - E_v} \cdot N_i$$

Or, $A_{2i} = d_0 \cdot a_{2i} = \frac{\tau_0}{K} \cdot a_{2i}$

d'où

$$A_{2i} = \frac{\tau_0^2}{K (\alpha \cdot N_i \tau_0 - E_v)} \cdot N_i$$

(2,72)

$$A_{1i} = \frac{\tau_0^2}{K (\alpha N_i \tau_0 - E_v)}$$

b) Etude des graphes de ces fonctions en fonction de E_v

Etant donné le caractère transcendant de ces fonctions, il n'est pas possible de les étudier d'une manière analytique ; c'est pourquoi nous sommes obligé de faire appel à une méthode numérique .

Cependant, d'une manière qualitative, on peut dire que, d'après les courbes $\Re_i = f(a_2)$, la variation de $A_{i,i} = \Gamma(E_v)$ est monotone et que $A_{i,i}$ croît avec E_v et devient infini pour E_{vlim} tel que $\frac{E_{vlim}}{\tau_0} = \Re_{ilim}$

On peut noter, à l'aide des graphes, la quasi disparition du second mode propre pour $E_v < \tau_0 \cdot \frac{4}{\pi} \frac{(K-k)}{K} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ et une réapparition « brutale » de ce mode avec de grandes amplitudes quand $E_v \rightarrow E_{vlim} = \Re_{2lim} \cdot \tau_0$

On peut également tracer $A_{i,i} = \Gamma \left(\frac{E_v}{\tau_0} \right)$ en fonction de la fréquence car, en effet, à chaque valeur de E_v correspond un rapport $\Re_v$ et, par suite, par l'intermédiaire de la courbe squelette graduée en $\Re$, nous avons la fréquence .

2,852 Etude de $A_i = \Gamma \left(\frac{E_0}{\tau_v} \right)$

Reprenons les équations (2,721) et (2,722) ; maintenant, nous recherchons leurs variations en fonction de τ_v , mais pour les mêmes raisons que précédemment, l'étude analytique n'est pas possible, aussi le problème sera-t-il traité d'une manière numérique.

Cependant, on peut donner a priori l'allure des courbes. En effet, si $\tau_v \rightarrow \tau_{v \lim} = \frac{E_0}{\Re_{i \lim}}$
 $A_{i1} \rightarrow +\infty$ et si $\tau_v \rightarrow \infty$ $A_{2i} \sim \frac{\tau_v \rightarrow \infty}{K}$ ainsi que A_{1i} .

Or, la courbe a une allure parabolique $(f(\tau_v^2))$ et donc $A_{i,i} = \Gamma \left(\frac{E_0}{\tau_v} \right)$ est d'abord décroissante, passe par un minimum, puis est croissante : d'où le tracé des graphes.

Interprétation : On constate, à l'aide des graphes, lors d'un balayage en frottement, pour une force d'excitation E_0 donnée, que si τ_v croît, A_{21} et A_{11} décroissent très rapidement, puis passent par un minimum et, qu'ensuite, A_{21} croît lentement, alors que A_{11} croît rapidement d'une manière quasi-linéaire avec τ_v et de pente $(1/K)$.

D'autre part, malgré la conservation théorique des modes, il y a disparition pratique du 2ème mode dès que $\tau_v > \frac{E_0}{\Re_{1 \lim}}$ et réapparition brutale si $\tau_v < \frac{E_0}{\Re_{2 \lim}}$

2,9 Relation entre $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$ et les caractéristiques du système physique

Nous avons vu dans le paragraphe (2,713) les relations qui existent respectivement entre $C_2(A_2)$, $S_2(A_2)$ et K_{2e} , B_{2e} , raideur et coefficient d'amortissement équivalent si nous avons utilisé la méthode de linéarisation équivalente pour résoudre notre problème.

En particulier, rappelons les résultats consignés dans les équations (2,551) et (2,552)

$$K_{2e} = \frac{C_2(A_2)}{A_2} \quad \text{et} \quad B_{2e} = - \frac{S(A)}{\omega \cdot A_2}$$

Ce qui montre que $C_2(A_2)$ et $S_2(A_2)$ sont intimement liées avec le système physique réel, ce qui va nous permettre de donner une évaluation, ou une valeur exacte, de ces fonctions à partir des caractéristiques physiques du système et, en particulier, à partir du cycle d'hystérésis qui régit le mouvement.

2,91 Calcul de $S_2(A_2)$

Pour calculer $S_2(A_2)$, nous allons calculer l'énergie dissipée dans un système ayant un coefficient d'amortissement égal à B_{2e} , dans ce cas, nous savons que le diagramme

dans le plan « force -déplacement » est une ellipse dont le grand axe incliné a pour équation $F = K_{2e} \cdot X$.
Par définition, l'aire de cette ellipse représente l'énergie dissipée par cycle .

Or, l'expression de l'énergie dissipée dans un système visqueux s'écrit :

$$D_v = \int_{t_1}^{t_1+T} (B_{2e} \cdot \frac{dx}{dt}) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$D_v = \pi \cdot B_{2e} \cdot \omega \cdot A_2^2 \quad (2,73)$$

Si nous remplaçons B_{2e} par sa valeur, il vient :

$$D_v = -\pi \cdot A_2 \cdot S_2(A_2) \quad \text{ou encore : } S(A) = -\frac{D_v}{\pi \cdot A_2}$$

Mais, dans le cas d'amortissement par frottement de Coulomb le cycle « Force - déplacement » est un parallélogramme et dans ce cas l'énergie exacte dissipée est exprimée dans l'équation (2,66) du paragraphe (2,82)

$$D_f = 4 (A_2 - d_0)(K - k) d_0$$

Or, d'après l'équation (2,24)

$$S_2(A_2) = -\frac{4}{\pi} (A_2 - d_0) (K - k) \frac{d_0}{A_2}$$

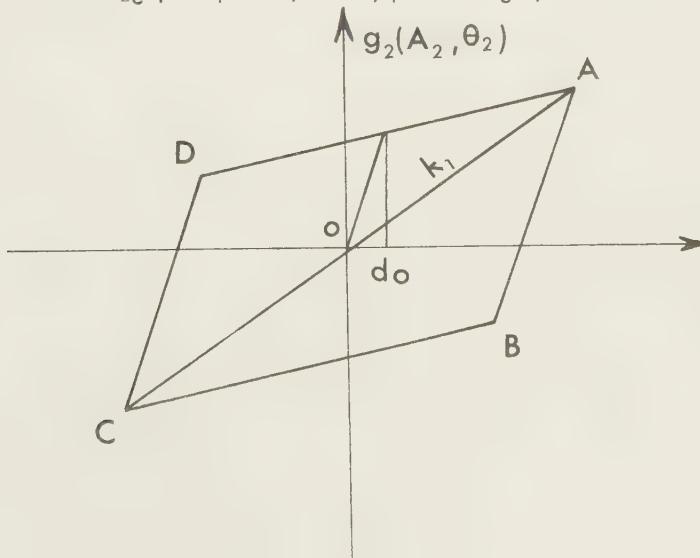
d'où l'identité suivante :

$$S_2(A_2) = -\frac{D_f}{\pi \cdot A_2} \quad (2,74)$$

Ainsi, nous voyons que $S(A)$ est directement liée à l'énergie dissipée c'est-à-dire à l'aire du cycle et donc sa valeur exacte peut être fournie par un essai statique .

2,92 Calcul de $C_2(A_2)$

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que le grand axe de l'ellipse avait K_{2e} pour pente ; aussi, par analogie, nous allons lier $C_2(A_2)$ à la pente de la grande



diagonale du cycle d'hystérésis réel.

La droite OA a pour équation:

$$Y_{OA} = K_1 x_2 \text{ soit } K_1 = \frac{\Delta Y_{OA}}{\Delta x_2}$$

Or, OA passe par le point A

qui appartient à la droite

DA qui a pour équation :

$$Y_{DA} = kx_2 + (\tau - kd_0) \text{ avec}$$

$\tau = K \cdot d_0$, d'où les coordon-

$$\begin{aligned} \text{nées de A :} \quad & x_A = A_2 \\ & Y_A = k A_2 + (K - k) d_0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad K_1 = k + (K - k) \frac{d_0}{A_2} \quad (2,75)$$

Or, d'après l'équation (2,26)

$$C_2(A_2) = \frac{A_2}{\pi} [(K - k) (\theta_2^* - \frac{\sin 2\theta_2^*}{2}) + k\pi] \quad \text{avec} \quad \cos \theta_2^* = (1 - \frac{2d_0}{A_2})$$

Une résolution numérique nous montre que $\frac{C_2(A_2)}{A_2}$ est toujours, sauf pour les faibles valeurs de a_2 , inférieure à K_1 , pente de la grande diagonale A^2 , avec une erreur qui ne dépasse pas, dans le cas le plus défavorable, 12 %.

Cependant, si dans les différentes équations, nous remplaçons $\frac{C_2(A_2)}{A_2}$ par K_1 et, en particulier, dans le calcul de N_1 et, par suite, dans le calcul de la courbe squelette, on constate que l'erreur n'excède plus 4 % pour le fondamental en ce qui concerne la résonance de phase, ce qui nous montre que dans la méthode de Krylov et Bogolioubov, on peut déterminer les valeurs de $S_2(A_2)$ et $C_2(A_2)$ à partir du cycle d'hystérésis, c'est-à-dire d'un essai statique, sans que cela entraîne, sur le résultat final, une divergence maximum de 4 %, cette divergence étant due exclusivement à l'estimation de la raideur équivalente.

2,10 Conclusions à partir de l'étude théorique.

L'étude dynamique théorique par la méthode de variation des constantes de Krylov et Bogolioubov, ainsi que l'étude du bilan énergétique, nous ont amenés aux constatations suivantes :

1°) Le système, au sens habituel du mot en mécanique, possède des résonances du type « mou » c'est-à-dire que la résonance de phase et d'amplitude se déplace vers les basses fréquences lorsque l'amplitude augmente par suite d'un accroissement de l'excitation.

2°) Théoriquement, il y a conservation des modes propres, mais, seules, les amplitudes du fondamental sont « grandes », les amplitudes du second mode sont très faibles, avec un déplacement important de fréquence, aussi peut-on, d'une manière pratique, conclure en la disparition du second mode qui réapparaît brutalement avec de grandes amplitudes quand l'excitation tend vers l'excitation critique.

3°) Pour une excitation donnée, si l'on effectue un balayage à frottement croissant, on constate qu'il y a d'abord une décroissance « linéaire » des amplitudes absolues du système, puis, lorsque le frottement augmente de nouveau, il se produit comme une « saturation » pour le minimum des amplitudes et, par suite, en continuant le balayage, on constate une augmentation progressive et quasi -

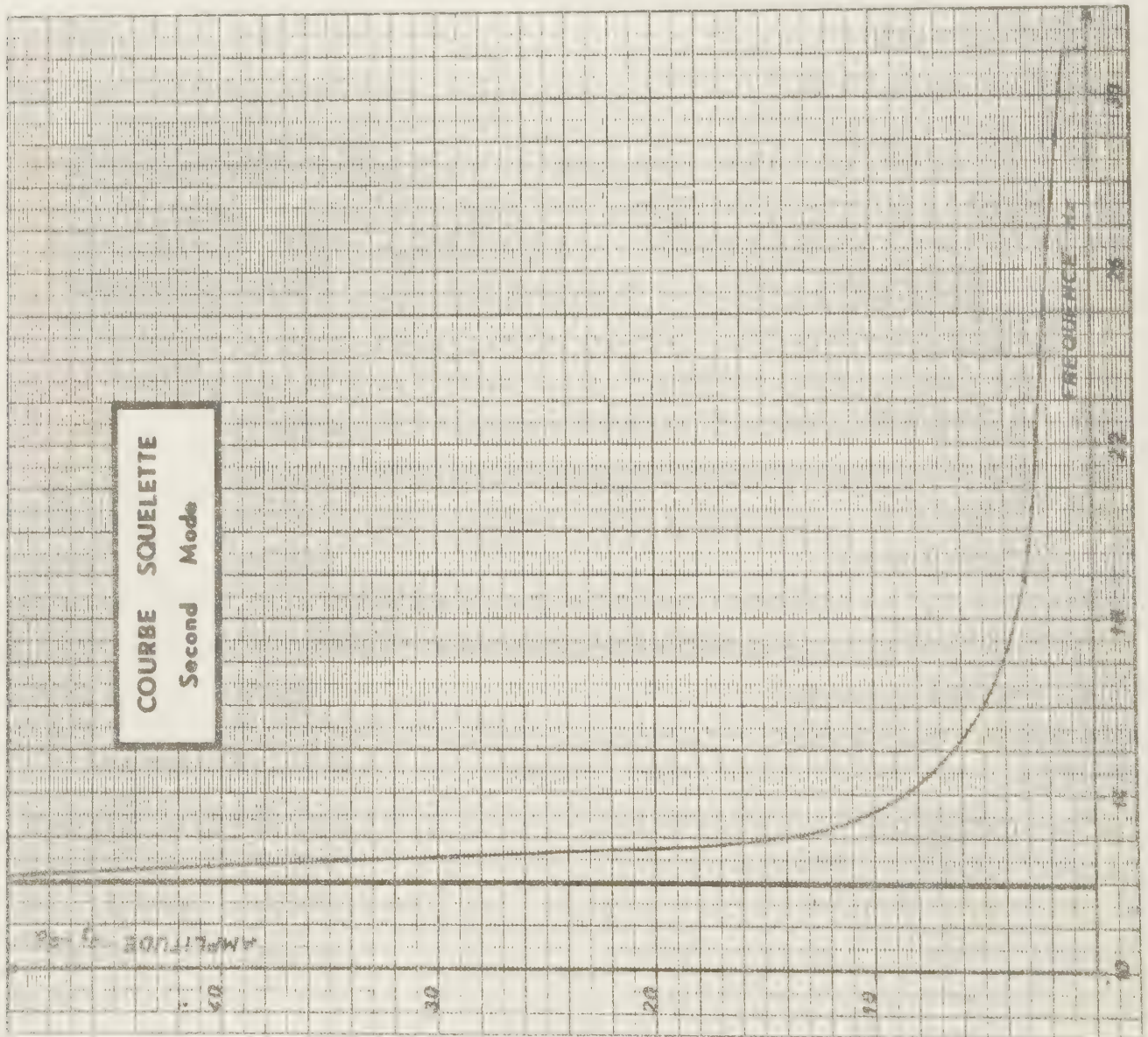
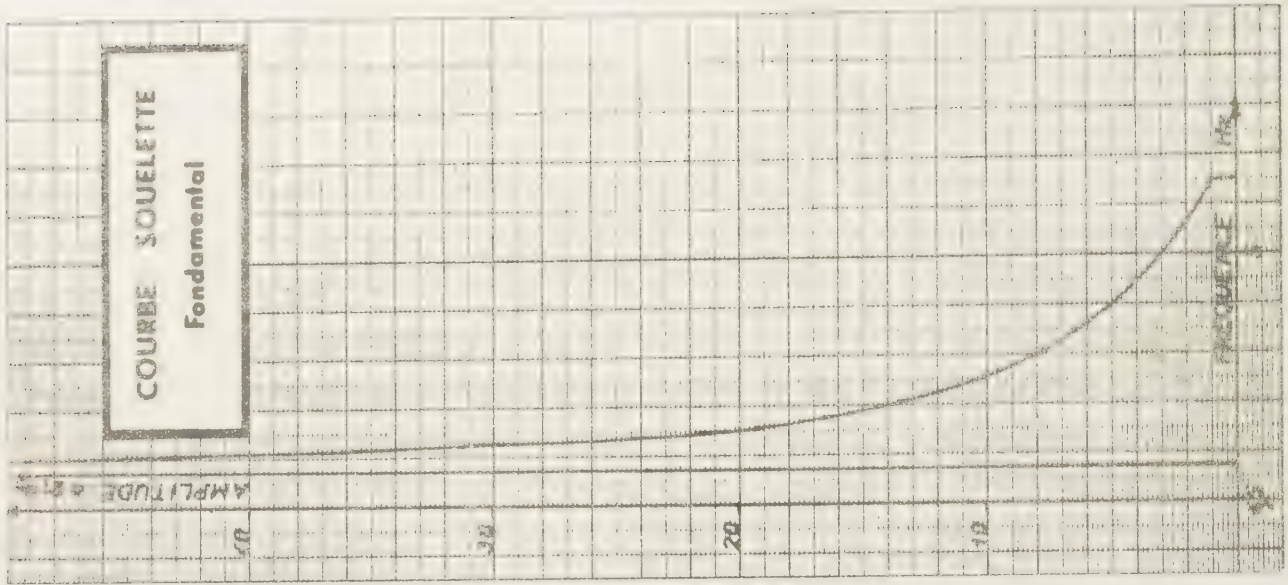
linéaire des amplitudes absolues.

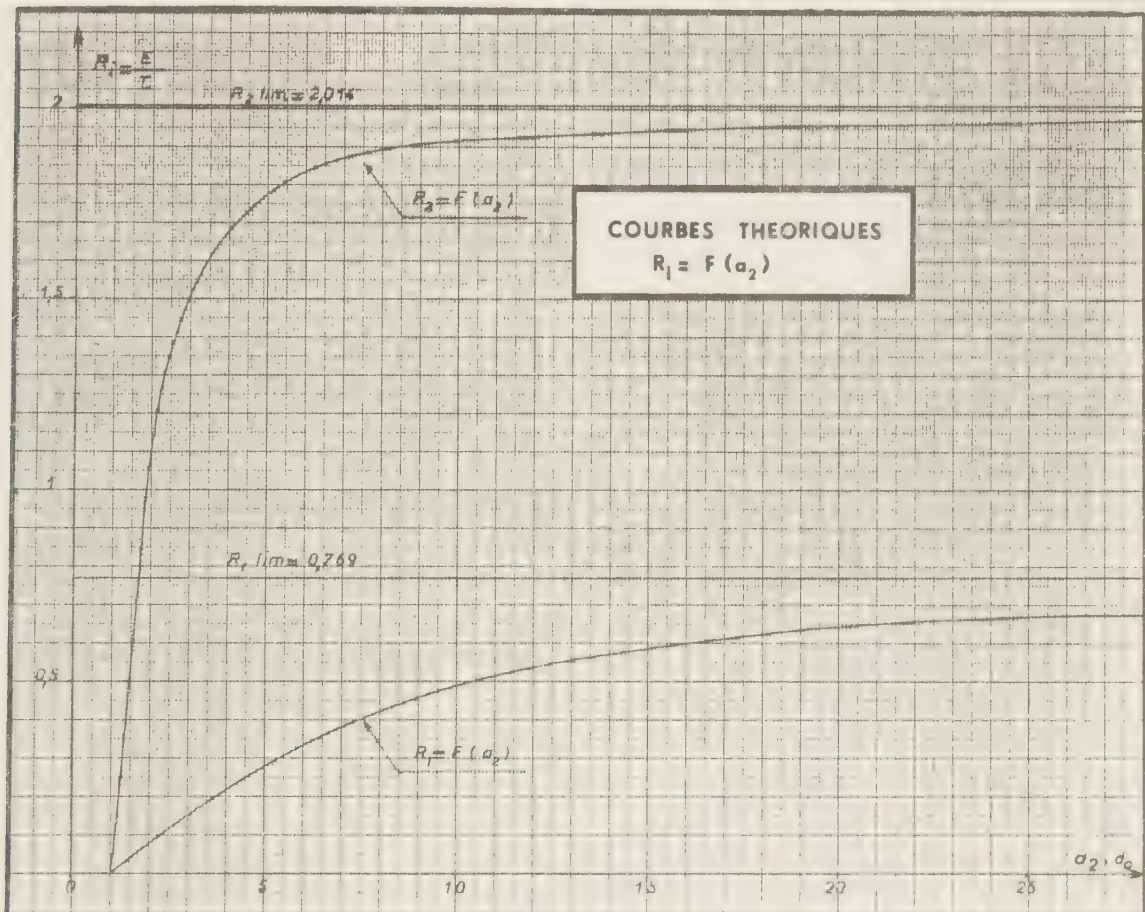
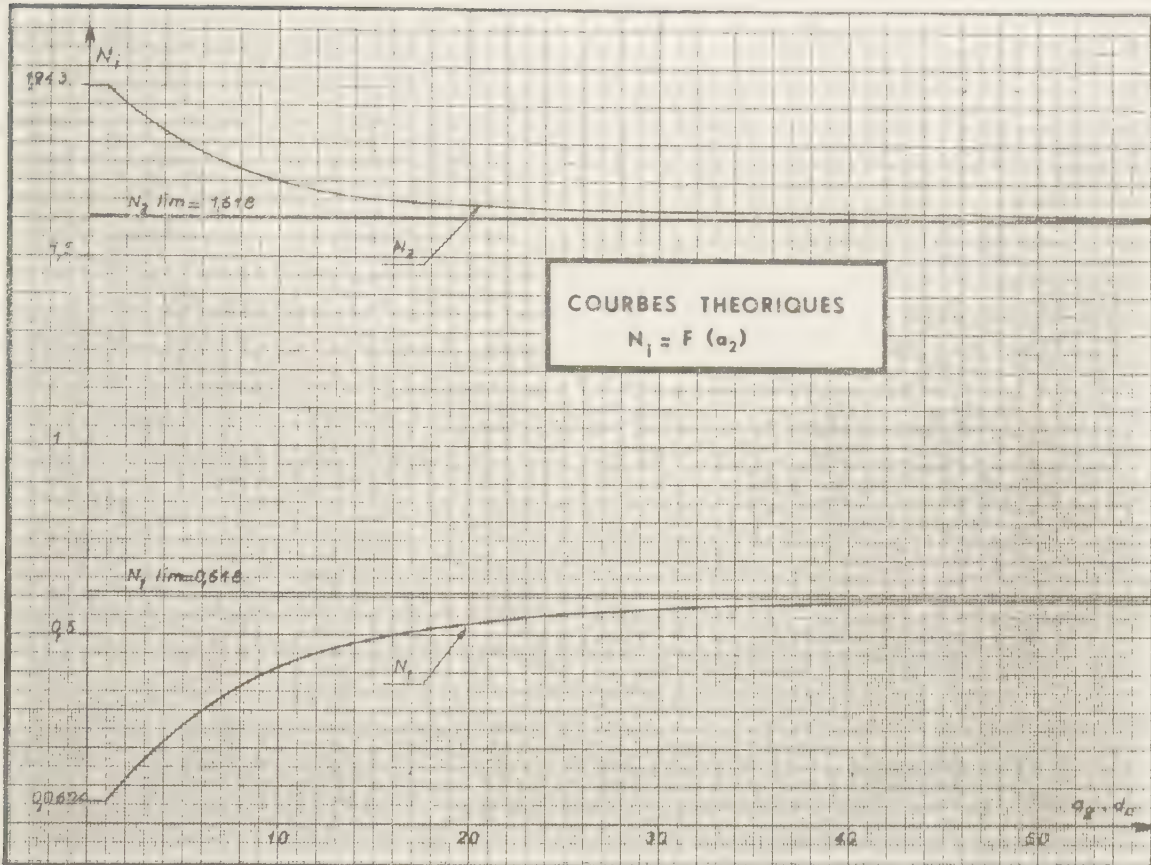
On peut donc dire, par analogie avec le 1°), que lors du balayage à frottement croissant, la résonance est du type « mou » dans la première partie et du type « dur » dans la seconde, avec, pour une excitation donnée, un amortissement optimum, ou encore, que les résonances se déplacent vers les « hautes fréquences » avec le frottement croissant.

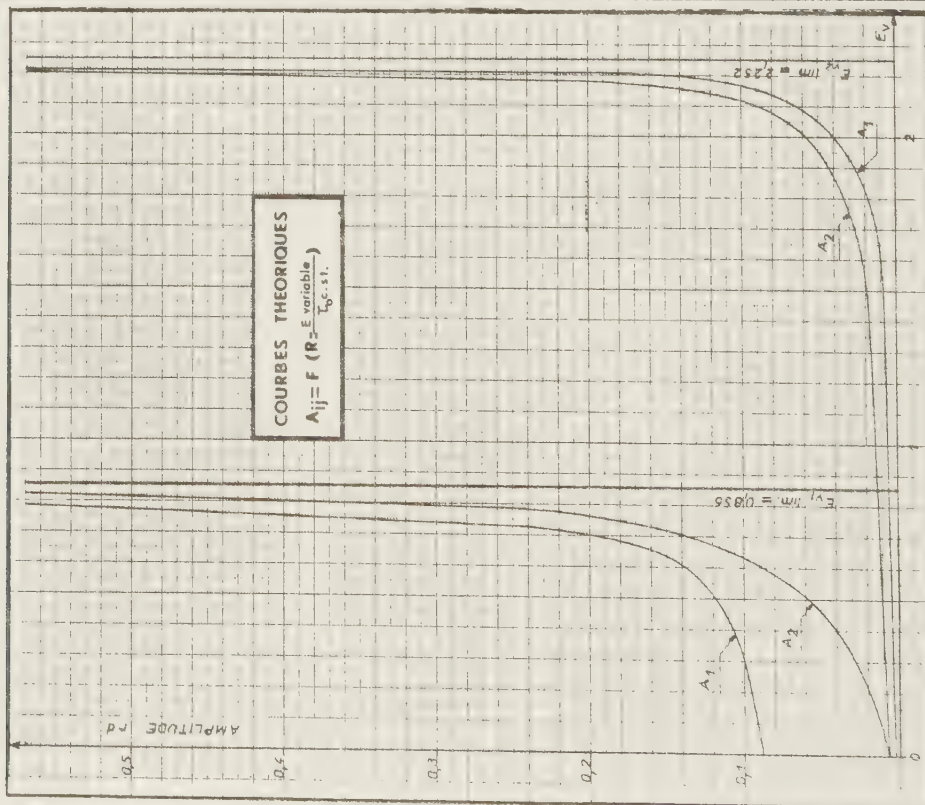
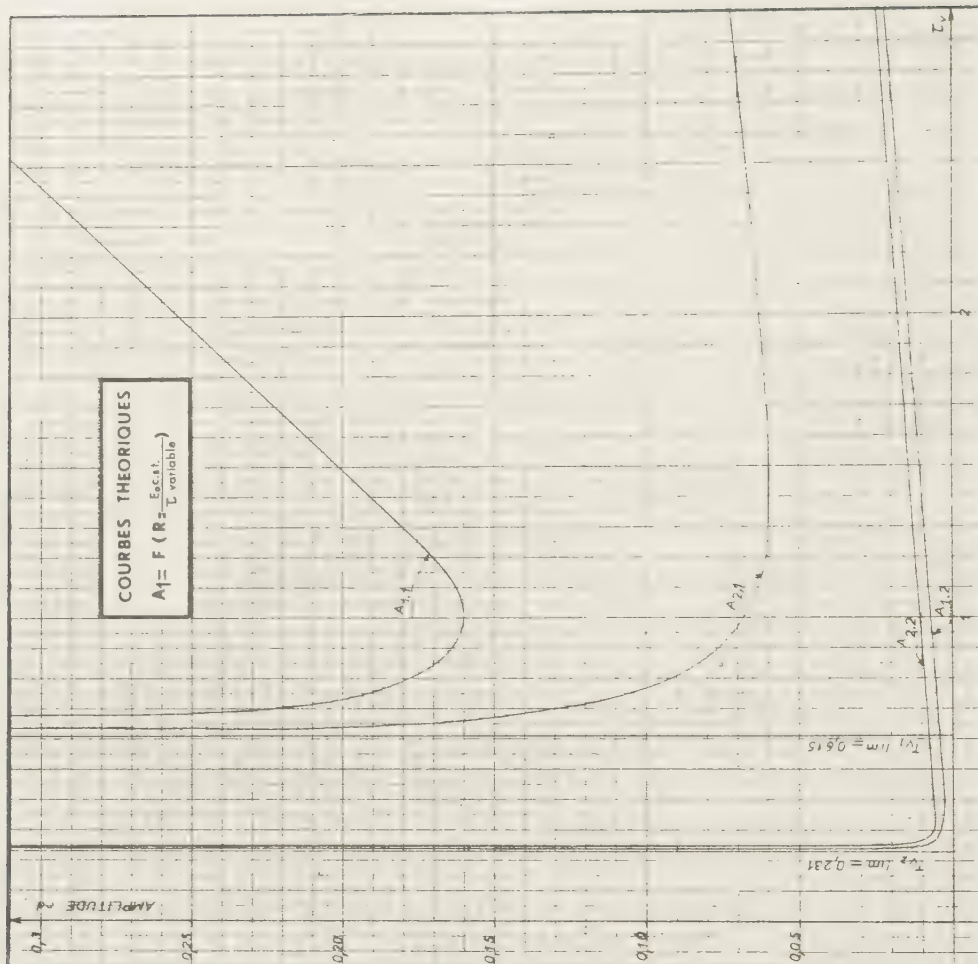
4°) La réponse globale du système ne dépend, en définitive, que du rapport $\mathfrak{R} = \frac{E}{\tau}$; force d'excitation sur force de frottement et, en particulier, ce rapport nous fixe d'une manière unique les fréquences de résonance et les amplitudes à cette résonance. D'autre part, à l'aide des courbes squelettes et des courbes de début et fin de glissement, nous pouvons donner une allure précise de la courbe de réponse. Nous avons également la possibilité d'ajuster le rapport $\mathfrak{R}$ pour écarter, par exemple, la résonance d'amplitude d'une valeur bien déterminée, et donc, de se situer dans une zone « calme ».

5°) Une étude statique nous permet d'obtenir la valeur exacte de $S(A)$ et une valeur approchée de $C(A)$ et donc, par l'intermédiaire de ce qui précède, de prévoir d'une manière précise le comportement dynamique.

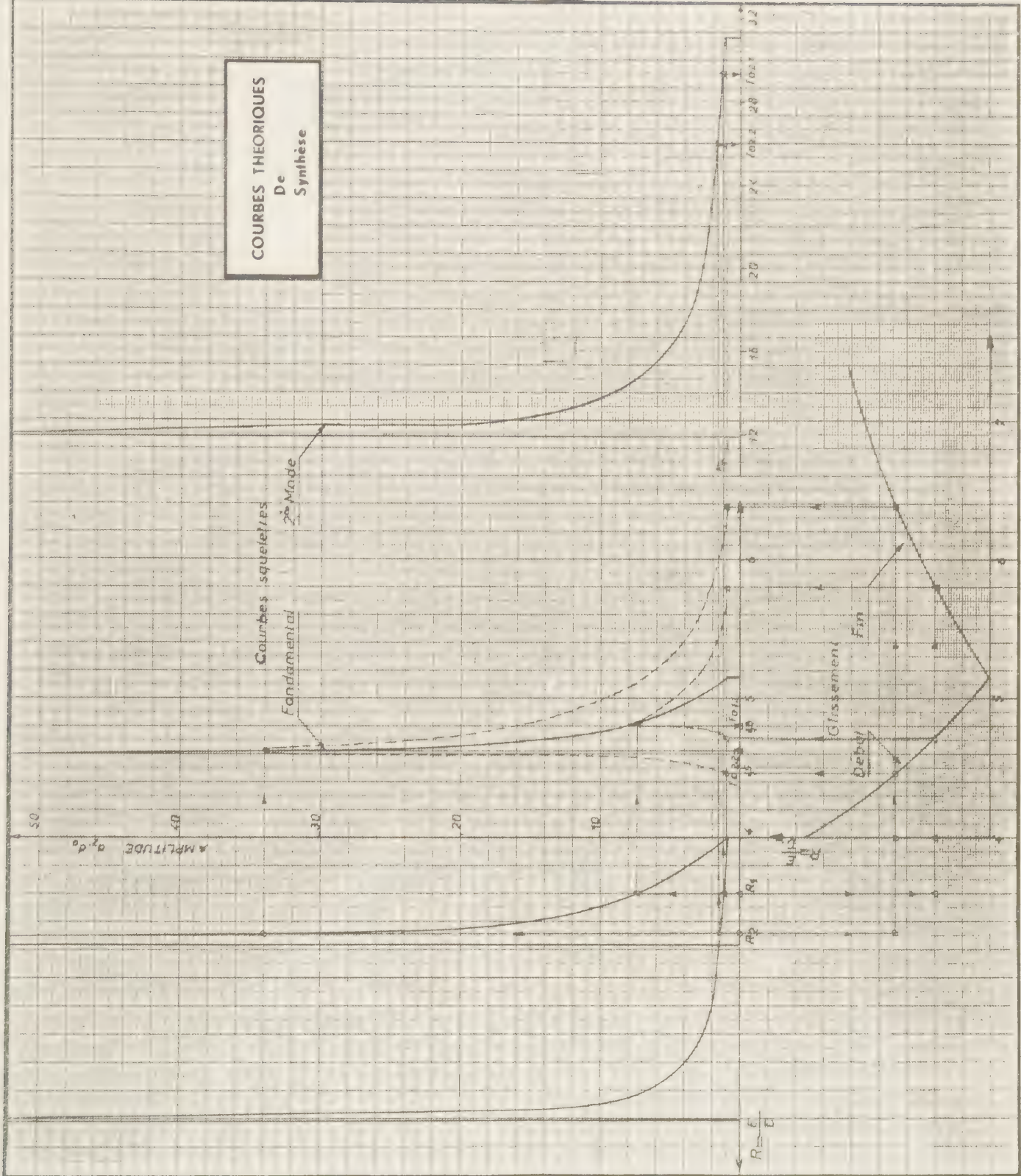
6°) Très rapidement, le comportement global du système est celui d'un degré de liberté ayant un fondamental « mouvant » aussi bien en amplitude qu'en fréquence et l'amortissement par frottement sec constitue pour les modes propres un « filtre passe-bas » en éliminant pratiquement le mode supérieur.







COURBES THEORIQUES
De
Synthèse



B - ETUDE EXPERIMENTALE

I - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1.1 Description de la chaîne

Le système en chaîne à deux degrés de liberté couplés, répondant au schéma de principe ayant servi à élaborer la théorie, a été réalisé d'une manière pratique, par un système en rotation, contre la translation, conduisant à une réalisation pratique plus simple et surtout plus « pure » en éliminant ou en atténuant au maximum les effets parasites, (en particulier, l'amortissement externe) .

L'ensemble est composé d'un axe en acier à ressort qui possède une grande limite élastique et donc une caractéristique « force - déformation » linéaire dans un domaine très étendu, tout en ayant un minimum d'amortissement interne . Cet axe a un double rôle et, en particulier, il est utilisé comme raideur inter-masses, jouant le rôle d'une barre de torsion et , en même temps, il sert de support d'axe de rotation aux masses .

Comme l'étude a été effectuée sur un système rotatif, les masses intervenant dans ce cas par leur inertie, sont constituées par deux disques identiques en AU 4G de 280mm de diamètre et de 1mm d'épaisseur; l'inertie a encore été augmentée par deux couronnes en tôle d'acier de 3mm d'épaisseur et de 20mm de largeur, ceci dans le but d'obtenir les fréquences propres dans des limites déterminées. L'ensemble disque-couronne est rendu solidaire de l'axe élastique par l'intermédiaire d'une pièce secondaire bloquée très énergiquement en position à l'aide de plusieurs vis de pression ayant l'extrémité trempée, assurant une liaison totale de l'axe et du «disque-couronne» et, en particulier, la liaison en rotation, le tout étant supporté par deux paliers lisses .

Le dispositif d'amortissement par frottement de Coulomb étant réalisé par un cylindre sur lequel viennent frotter deux patins , chaque patin est porté par une première lame; puis une deuxième, ou contre-lame, encastrée à l'une de ses extrémités , vient exercer une pression normale réglable sur le patin par l'intermédiaire d'une vis ayant un pas de 0,5mm, se vissant dans un trou taraudé à l'autre extrémité de la contre-lame, faisant ainsi varier la flèche de l'extrémité libre et, donc, la force pressante sur le patin (voir croquis et photographie de l'ensemble) .

1,2 Excitation

L'excitation forcée harmonique est du type déplacement . Elle est réalisée par un ensemble mécanique constitué d'un maneton excentré entraînant en translation une bielle à coulisse qui, à son tour, fait osciller un levier (1) , possédant une glissière, par l'intermédiaire d'un axe muni d'un galet, puis ce levier (1) fait, lui-même, osciller, par l'intermédiaire d'une bielle, un levier (2) solidaire en rotation de l'axe élastique (voir chaîne cinématique) .

L'amplitude E_0 de l'excitation est réglable de deux manières : d'abord, par augmentation de l'excentration R du maneton M , puis, d'une manière continue par réglage de la distance Δ de la bielle à coulisse à l'axe d'oscillation du levier (1) . La variation de la fréquence s'effectue à l'aide d'un moteur à variateur continu (Brevet Seguin frères) et d'un alternostat. De plus, le moteur possède un lourd volant d'inertie jouant le rôle de régulateur pour les basses fréquences .

REMARQUE - L'ensemble maneton - bielle à coulisse et levier , qui constitue l'excitation pour le domaine d'utilisation expérimental, entraîne un taux d'harmonique inférieur à 10^{-3} et donc absolument négligeable (voir calcul en annexes)

1.3 Mesures

1,31 Mesure de la fréquence

La mesure de la fréquence s'effectue à l'aide d'un capteur capacitif situé devant le volant régulateur du moteur; ce volant porte un « top » positif. Lors du passage du « top » devant le capteur, cela se traduit par une impulsion qui est contrôlée à l'aide d'un oscillographe , puis une fraction est injectée dans un compteur à affichage numérique Rochar .

Le compteur Rochar est utilisé en périodemètre et, en général, les périodes sont données avec au moins 2 chiffres significatifs exacts, d'où une erreur relative toujours inférieure à 0,5 %.

$$\frac{\Delta f}{f} \leq 0,5 \text{ } \%$$

1,32 Mesure des amplitudes des disques

Les mesures des amplitudes absolues des disques ont été effectuées d'une manière visuelle d'index, solidaire de chacun des disques, se déplaçant devant des secteurs gradués fixes . L'erreur de lecture est sensiblement variable suivant la fréquence mais elle reste toujours inférieure à $\pm 0,5$ degré pour chaque valeur absolue de chacun des disques, ce qui nous conduit à une erreur absolue de ± 1 degré sur l'amplitude relative des deux disques . L'erreur relative sur les amplitudes absolues reste toujours inférieure à $\frac{\Delta Y_i}{Y_i} \leq 5 \text{ } \%$

Par contre, l'erreur relative sur l'amplitude relative A_2 des deux disques augmente avec le frottement et pour les plus fortes valeurs, cette erreur peut atteindre 30 à 40 ‰

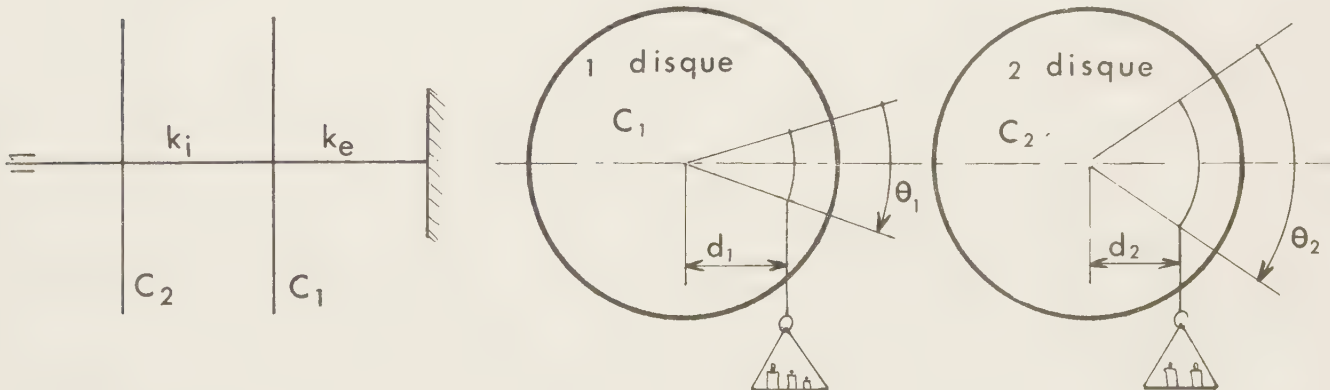
$$\frac{\Delta A_2}{A_2} \leq 40 \text{ ‰}$$

2 - ETUDE STATIQUE

2,1 Mesure des raideurs

Le montage des deux disques a été effectué de façon à obtenir une raideur k_e égale à la raideur inter-disques k_i . Pour connaître ces deux valeurs, nous avons procédé aux essais suivants.

Après avoir verrouillé la tige élastique côté excitation, nous avons d'abord appliqué un couple C sur le premier disque, le deuxième étant libre et nous avons noté, pour chaque couple appliqué, la rotation θ_1 ; puis, l'excitation étant toujours bloquée, nous avons appliqué un couple C_2 sur le deuxième disque et, dans les mêmes conditions, nous avons noté θ_2 .



Résultats obtenus

Disque i	Charge en grammes	Bras de levier .m	Couple N.m	Rotation degrés	Rotation r d.
1	1000	11,9	1,168	3,5 ⁺	6,1 ⁺ .10 ⁻²
1	2000	11,5	2,275	7	12,2.10 ⁻²
1	3000	11	3,240	10 ⁺	17,45 ⁺ .10 ⁻²
2	1000	12	1,2	7	12,2.10 ⁻²
2	2000	12 ⁻	2,4 ⁻	14,5 ⁺	25,5.10 ⁻²
2	2500	12 ⁻	3 ⁻	18 ⁺	31,7.10 ⁻²

En traçant les graphes de ces deux essais à l'aide du tableau précédent, nous trouvons :

1^{er} essai : raideur d'entrée $k_e = 18,6 \text{ N.m/rd}$

2^{ème} essai: raideur d'ensemble $C = 9,32 \text{ N.m/rd}$

Or, dans notre cas particulier, k_e et k_i sont en série de sorte que nous avons la relation :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{k_e} + \frac{1}{k_i} \quad \text{soit} \quad k_i = \frac{k_e \cdot C}{k_e - C}$$

$$\text{soit } k_i = 18,6 \text{ N.m/rd} = k_e = k$$

■ Erreurs sur ces mesures

a) sur k_e

$$k_e = \frac{P \cdot L}{\theta} \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta k_e}{k_e} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \theta}{\theta} \quad \text{avec } \Delta P \approx 0$$

$$\text{d'où} \quad \left| \frac{\Delta k_e}{k_e} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta \theta}{\theta} \right|$$

$$\left| \frac{\Delta L}{L} \right| = \frac{1}{120}$$

$$\left| \frac{\Delta \theta}{\theta} \right| = \frac{1}{28} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{\Delta k_e}{k_e} \right| = 4,4 \% \quad \text{soit} \quad \left| \Delta k_e \right| = 0,8$$

$$k_e = 18,6 \pm 0,8$$

b) sur C

De la même façon, nous avons :

$$\left| \frac{\Delta C}{C} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta \theta}{\theta} \right|$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{120}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{1}{58}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{\Delta C}{C} \right| = 2,55 \% \quad \text{soit } |\Delta C| = 0,23$$

$$C = 9,32 \pm 0,23$$

c) sur k_i

$$k_i = \frac{k_e \cdot C}{k_e - C}$$

$$\text{d'où } \frac{\Delta k_i}{k_i} = \frac{\Delta k_e}{k_e} + \frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\Delta k_e}{k_e - C} + \frac{\Delta C}{k_e - C}$$

$$\frac{\Delta k_i}{k_i} = \Delta k_e \left[\frac{1}{k_e} - \frac{1}{k_e - C} \right] + \Delta C \left[\frac{1}{C} + \frac{1}{k_e - C} \right]$$

$$\frac{\Delta k_i}{k_i} = |\Delta k_e| \left[\frac{C}{k_e(k_e - C)} \right] + |\Delta C| \left[\frac{k_e}{C(k_e - C)} \right]$$

$$\left| \frac{\Delta k_i}{k_i} \right| = 9,5 \% \quad \text{soit } \Delta k_i = 1,76$$

$$k_i = 18,6 \pm 1,7$$

2.2 Calcul de l'inertie de chaque disque

Un degré de liberté est constitué par un disque en AU 4 G de 280 mm de diamètre et de 11 mm d'épaisseur et d'une couronne en acier de 3 mm d'épaisseur, de 280 mm de diamètre extérieur et de 240 mm de diamètre intérieur et de la pièce centrale de fixation sur l'axe de torsion.

$$I = I_{\text{disque}} + I_{\text{couronne}} + I_{\text{pièce centrale}}$$

$$I_{\text{disque}} = \frac{m R^2}{2} = \rho \cdot \frac{\pi R^4}{2} \cdot e$$

$$I_d = 16,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{\text{couronne}} = \rho \frac{\pi}{2} e [R_e^4 - R_i^4]$$

$$I_c = 65,40 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$\rho_d = 2800 \text{ kg/m}^3$$

$$R_d = 0,14 \text{ m}$$

$$e_d = 10^{-3} \text{ m}$$

$$\rho_c = 7.850 \text{ kg/m}^3$$

$$R_e = 0,14 \text{ m}$$

$$R_i = 0,12 \text{ m} \quad e = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

L'inertie de la pièce centrale est absolument négligeable devant les deux autres (inférieure à $0,5\%$). Tout calcul fait, on trouve $I_{\text{pièce centrale}} = 0,328.10^{-4}$

$$I_{\text{total}} = 82,63 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

■ Erreurs sur le calcul de I

Erreur sur I_1 :

$$\frac{\Delta I_1}{I_1} = 4 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta e}{e}$$

avec $\frac{\Delta R}{R} = \frac{0,1}{280}$

$$\left| \frac{\Delta I_1}{I_1} \right| = 5,14\% \quad \text{soit} \quad |\Delta I_1| = 0,87 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,05}{1}$

Erreur sur I_2 :

$$\frac{\Delta I_2}{I_2} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{4 \Delta R_e}{R_e - R_i} + \frac{4 \Delta R_i}{R_e - R_i}$$

avec $\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,05}{3}$

$$\Delta R_e = \Delta R_i = 0,1 \quad \left| \frac{\Delta I_2}{I_2} \right| = 3,66\% \quad \text{soit} \quad |\Delta I_2| = 2,39 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

Nous pouvons donc écrire :

$$I = 82,60 \pm 3,76$$

2,3 Tracé de cycle d'hystérésis

Nous avons effectué le verrouillage du deuxième disque et nous avons appliqué sur le premier un couple C lentement variable, croissant jusqu'à une valeur C_m , puis décroissant jusqu'à la valeur $-C_m$ et croissant de nouveau jusqu'à la valeur C_m . Pour chaque valeur C_i du couple, nous avons relevé la rotation θ_{1i} du premier disque et ceci pour différentes valeurs du couple de frottement. Les cycles obtenus sont représentés par les graphes.

2,4 Rapport des pentes - Raideur inter-disque lorsqu'il n'y a pas glissement .

Les cycles expérimentaux obtenus sont très réguliers; cependant, les extrémités sont très légèrement arrondies et non pas parfaitement linéaires, aussi avons-nous tracé des pentes moyennes et, à partir des différents cycles, nous avons trouvé que le rapport des pentes était en moyenne de 8,5

$$\text{d'où : } \frac{K}{k} = 8,5 \quad \text{avec} \quad k = 18,6$$

$$K = 158 \text{ N.m /r.d.}$$

■ Erreur commise sur K

$$\text{Nous avons vu } K = a \cdot k_i$$

$$\text{d'où : } \left| \frac{\Delta K}{K} \right| = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta k}{k} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta a}{a} \neq 20 \%$$
$$\frac{\Delta k}{k} \neq 9,50 \%$$

$$\text{soit } \left| \frac{\Delta K}{K} \right| = 30 \% \quad \text{soit } |\Delta K| = 47 \text{ N.m/rd}$$

$$K = 158 \pm 47 \text{ N.m/rd}$$

2,5 Coefficient de frottement

A partir des cycles d'hystérésis, nous avons pu déterminer le couple de frottement pour chaque réglage de la force normale F_N s'exerçant sur les patins; ce couple de frottement s'écrit :

$$C_f = F_N \cdot f \cdot d$$

f : coefficient de frottement

d : diamètre du cylindre de frottement

$$d = 25 \text{ mm}$$

d'où l'expression du coefficient de frottement :

$$f = \frac{C_f}{F_N \cdot d}$$

La force F_N qui s'exerce sur le patin nous est donnée par la flèche et la raideur de la contre lame . Cette raideur a été elle-même déterminée par un essai statique ; nous avons trouvé l'expression suivante pour la force normale :

$$F_N = 29,23 \cdot y \cdot N$$

y étant la flèche en mm .

■ Erreur commise sur le coefficient de frottement .

D'après son expression précédente :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta C_f}{C_f} - \frac{\Delta F_N}{F_N} \quad (\text{négligeable})$$

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{\Delta C_f}{C_f} \right| + \left| \frac{\Delta F_N}{F_N} \right|$$

Le couple de frottement est connu avec une précision identique à celle de K , c'est-à-dire à 20 % près . Quant à la précision sur F_N , elle est variable en valeur relative avec y puisqu'en effet, nous avons :

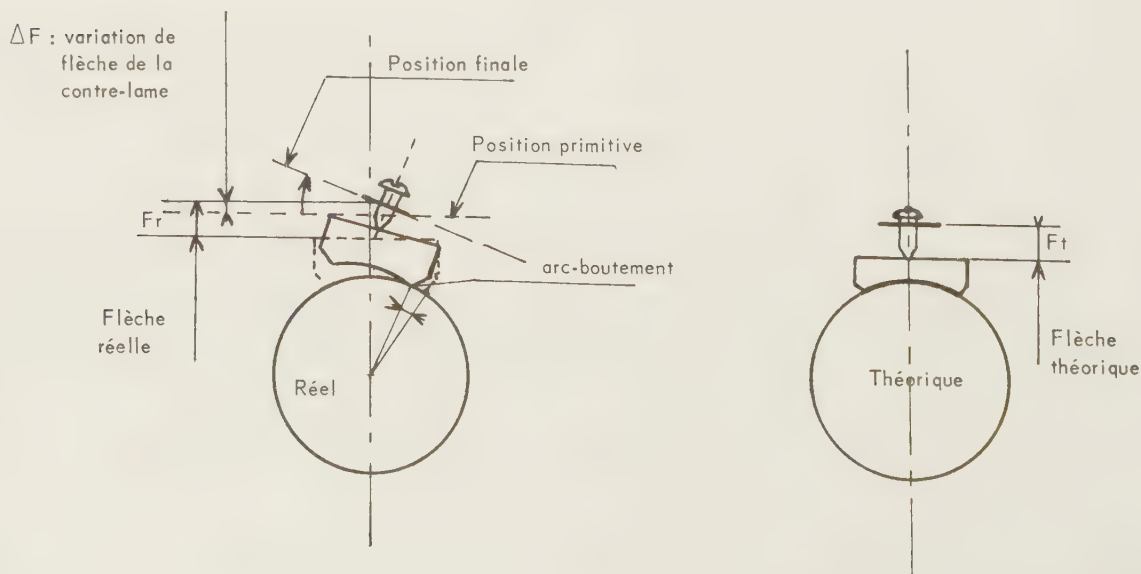
$$\frac{\Delta F_N}{F_N} \simeq \frac{\Delta y}{y} \quad \text{avec } \Delta y = 0,125 \text{ mm} = \text{Cste}$$

Tous calculs effectués, les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

$C_f \cdot N.m$	$1,34 \pm 0,27$	$1,12 \pm 0,22$	$0,79 \pm 0,16$	$0,541 \pm 0,11$	$0,275 \pm 0,05$	$0,184 \pm 0,04$	$0,113 \pm 0,02$
$F_N \cdot N$	$87,70 \pm 3,6$	$65,75 \pm 3,6$	$51,15 \pm 3,6$	$36,55 \pm 3,6$	$21,80 \pm 3,6$	$15,60 \pm 3,6$	$7,30 \pm 3,6$
F	$0,61 \pm 0,15$	$0,68 \pm 0,175$	$0,62 \pm 0,17$	$0,59 \pm 0,17$	$0,50 \pm 0,18$	$0,50 \pm 0,22$	$0,62 \pm 0,42$

REMARQUE SUR CES RESULTATS • Nous constatons que les coefficients de frottement obtenus sont très importants et ont tendance à diminuer avec la force normale . Nous pouvons donner quelques justifications à ceci. En effet, la gamme des forces normales étudiée nous conduit à une pression unitaire très grande, étant donné la faible surface portante du patin et, de ce fait, nous avons pu observer de nombreuses traces de grippage, ce qui modifie considérablement le coefficient de frottement .

D'autre part, du fait de leur élasticité, il se produit une certaine torsion des lamelles porteuses et contre-lamelles, ce qui entraîne deux modifications de l'état primitif de réglage (voir croquis) .



Il y a en effet entraînement du patin sur un arc $\Delta \theta$ et du fait de sa rotation relative, cela revient à augmenter la flèche, donc la force normale qu' exerce la contre-lame. Aussi, la force normale réelle est-elle sous-estimée et donc cela se traduit par une surestimation du coefficient de frottement.

On peut aussi remarquer sur le croquis que le patin ne porte plus sur toute sa surface et il se produit alors le phénomène d'arcboutement avec, en plus, une pression locale excessive , d'où grippage .

3 - ETUDE DYNAMIQUE

Nous avons effectué une double étude dynamique puisqu'en effet, nous avons deux paramètres expérimentaux indépendants : l'amplitude r de l'excitation, c'est-à-dire la force d'excitation et la force tangentielle de frottement, c'est-à-dire en définitive la force normale F_N . Pour effectuer cette étude, le système a été soumis à une excitation forcée, harmonique et du type déplacement . Auparavant cependant, nous avons effectué un balayage en fréquence du système conservatif afin de déterminer les modes propres. Les résultats obtenus sont les suivants :

	Fondamental	Second mode
fréquence théorique Hz	4,57 Hz $\pm$ 0,206	11,98 Hz $\pm$ 0,54
fréquence expérimentale Hz	4,55 $\pm$ 0,023	12,10 $\pm$ 0,06

3,1 Etude à frottement constant Balayage en excitation

Pour un couple de frottement τ_{01} réglé à l'avance, nous avons effectué un balayage en fréquence pour différentes valeurs croissantes de l'amplitude d'excitation. Nous avons recommencé la même opération pour un nouveau réglage primitif du frottement τ_{0i} (voir graphes) .

Nous pouvons constater que l'allure de ces courbes de résonance est bien celle prévue théoriquement et, en particulier, nous constatons que le système est du type « mou » , c'est-à-dire que la fréquence de résonance de phase et d'amplitude se déplace vers les basses fréquences quand l'excitation croît . Nous avons pu constater également qu'il y avait bien coïncidence de la fréquence de phase et d'amplitude . Les courbes de résonance ont été tracées en coordonnées expérimentales .

3,2 Etude à excitation croissante Balayage en frottement

Il s'agit de l'étude inverse de la précédente .

Pour une excitation donnée E_{01} , nous avons tracé les courbes de réponses pour des valeurs croissantes du couple de frottement . Comme prévu théoriquement, on constate que lorsque τ croît, l'amplitude décroît « linéairement » , se stabilise à une certaine valeur , puis ensuite, croît d'une manière quasi-linéaire avec τ . Pendant ce temps, on constate que la fréquence de résonance se déplace vers les hautes fréquences alors que τ croît et se comporte alors, vis à vis du frottement, comme un système dur. Ainsi qu'il a été fait précédemment, les courbes de résonance ont été tracées en coordonnées expérimentales .

÷
÷ ÷
÷

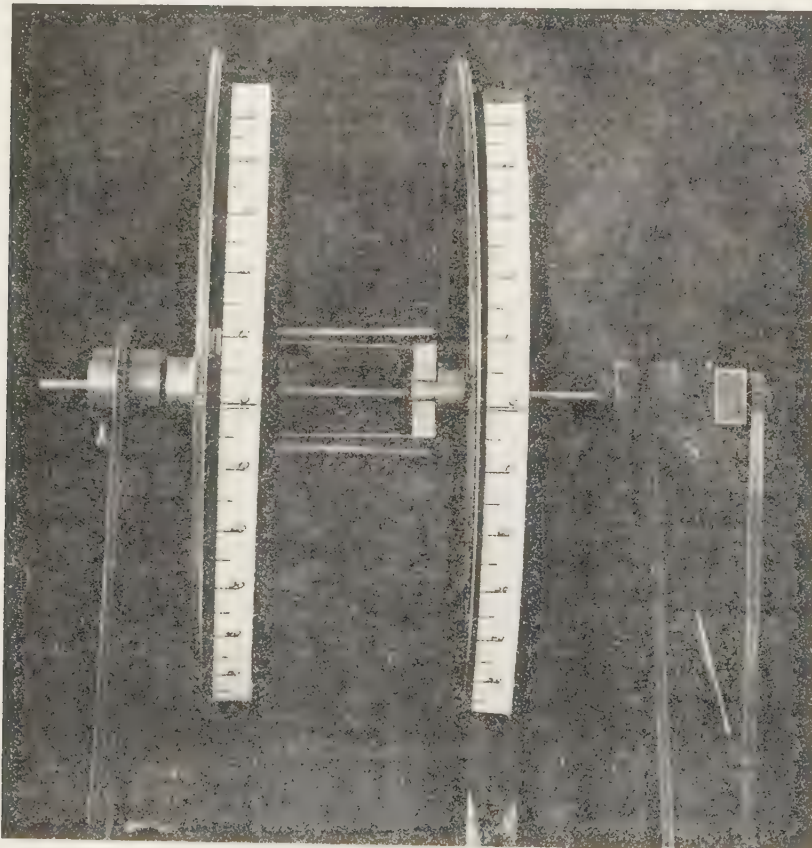
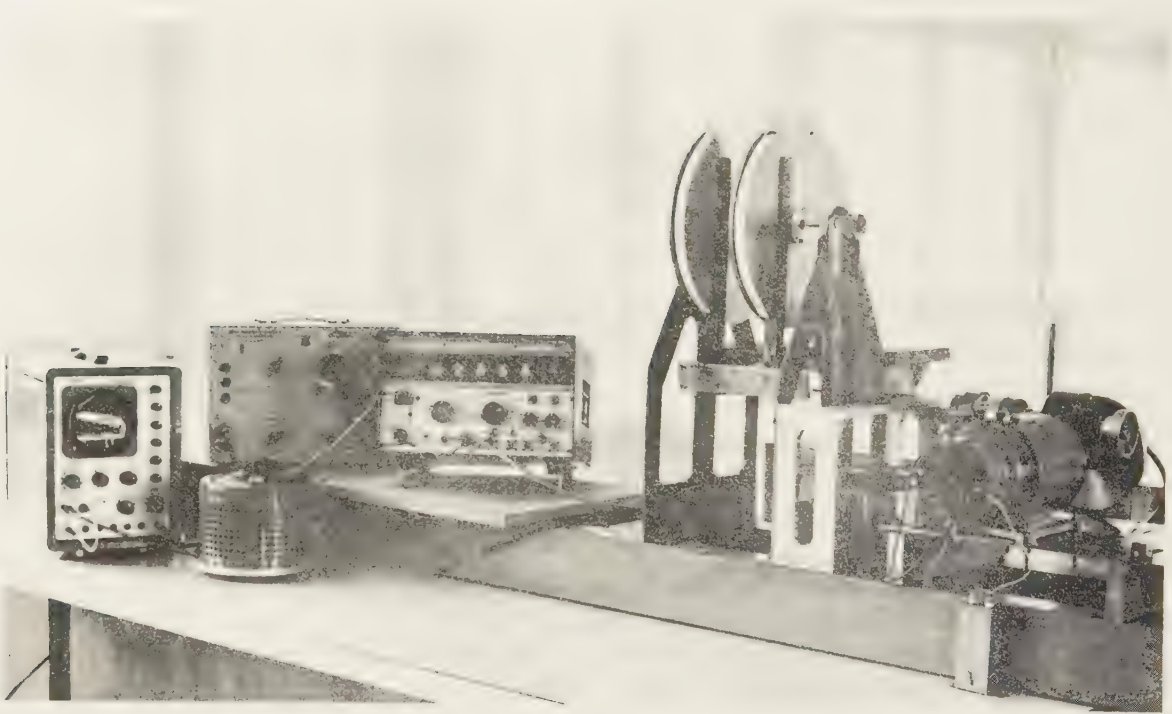
CONCLUSION DU PREMIER CHAPITRE

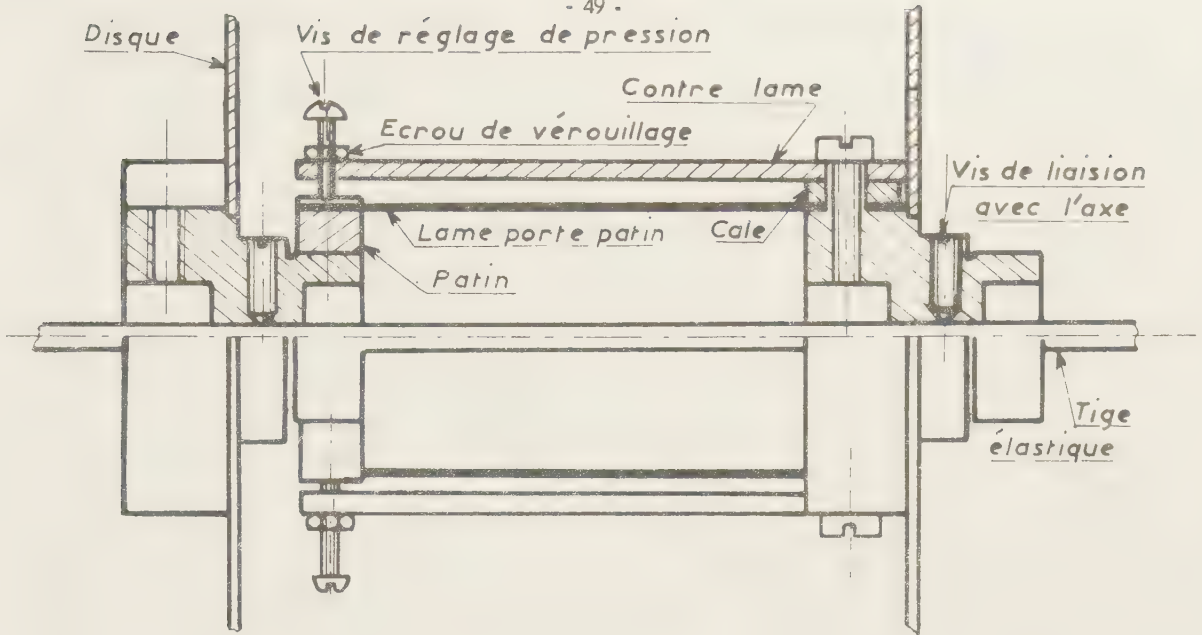
Le système en chaîne à hystérésis interne et à deux degrés de liberté couplés a été étudié d'une manière théorique, aussi complètement que possible, en ce qui concerne l'évolution du système en fonction des différents paramètres. La vérification expérimentale, par un système mécanique réel, a couvert tout le plan et a confirmé en tous points, les prévisions théoriques et ceci d'une manière très fidèle, malgré de grandes difficultés de réglage du frottement, de la mesure de l'amplitude relative des deux disques et une très grande diversité du réglage relatif des paramètres.

De toute l'étude précédente, nous pouvons retenir :

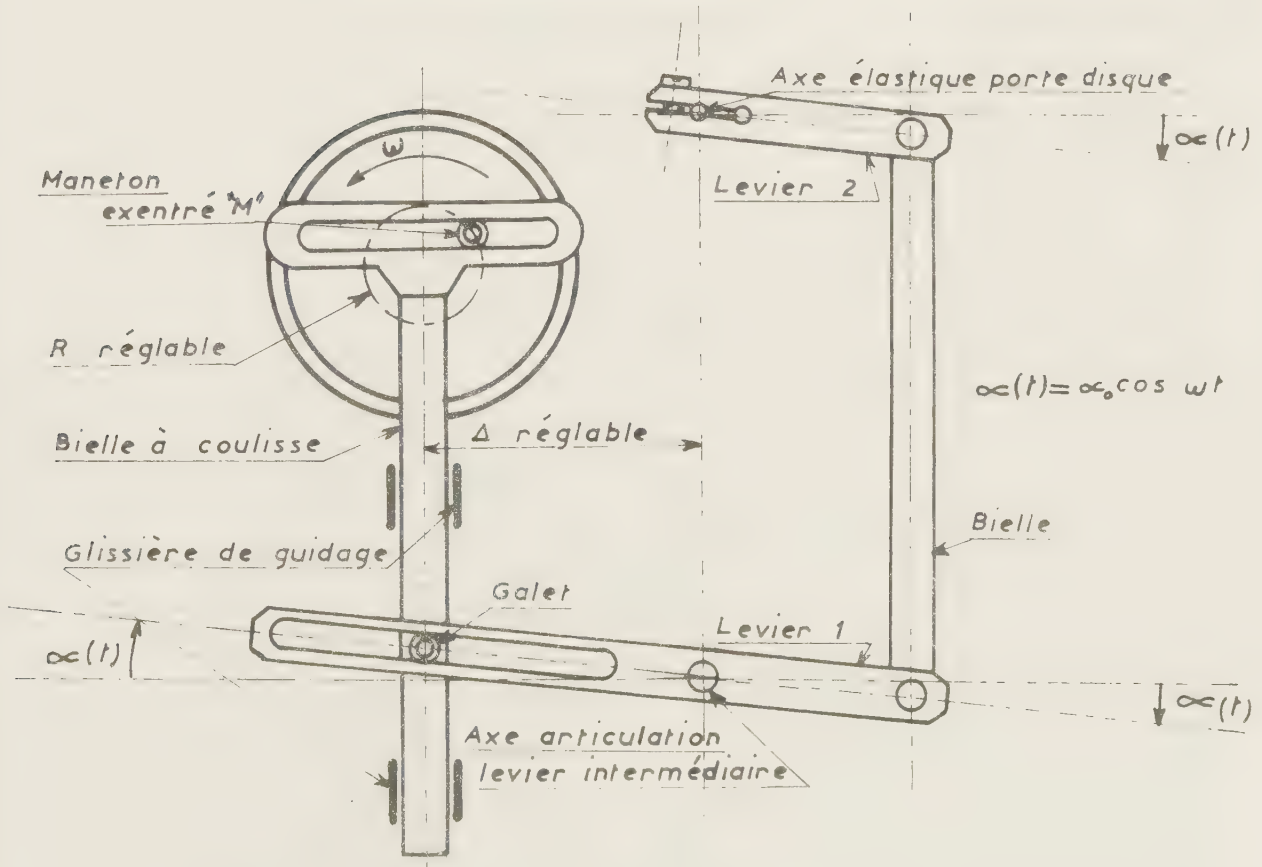
- que pour une force de frottement donnée, le système possède une résonance du type « mou » c'est-à-dire que la résonance se déplace vers les basses fréquences quand l'amplitude d'excitation et, par suite, l'amplitude du système, croît ;
- que, pour une excitation donnée, le système possède une résonance qui se déplace continuellement vers les hautes fréquences quand le couple de frottement croît alors que l'amplitude du système décroît d'abord rapidement, passe par un minimum, puis croît avec le couple de frottement ;
- qu'en définitive, la fréquence de résonance est fonction du rapport : $R = \frac{E}{\tau}$; E : force d'excitation, τ : couple de frottement ;
- que les résonances de phase et d'amplitude sont confondues et que tous les régimes sont stables ;
- qu'une simple étude statique nous permet d'obtenir la valeur exacte de $S(A)$, très approchée de $C(A)$ et N_1 et donc pour un rapport $R = \frac{E}{\tau}$ donné, de prévoir quelle sera la fréquence de résonance ainsi que l'amplitude réduite. D'autre part, si nous connaissons la valeur absolue, soit de l'excitation, soit du frottement, nous pouvons déterminer les amplitudes absolues par les relations $A_2 = a_2.d_0$, $d_0 = \frac{\tau}{K}$ et $\frac{A_2}{A_1} = N$

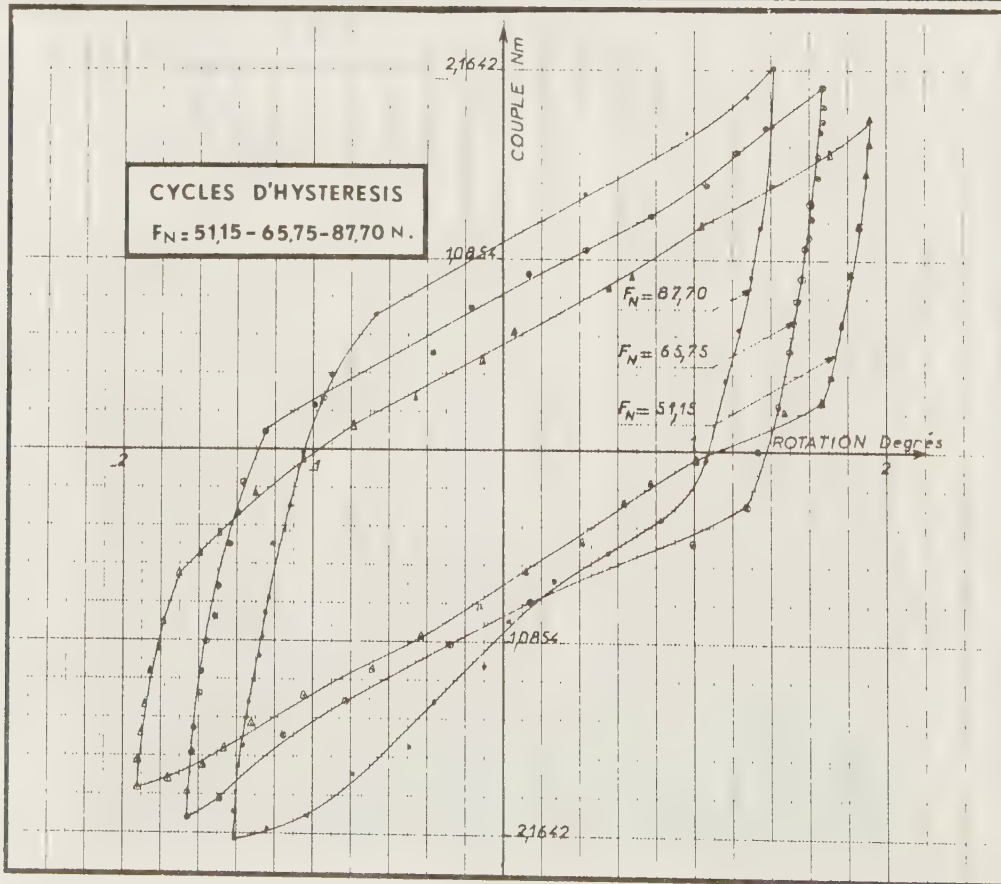
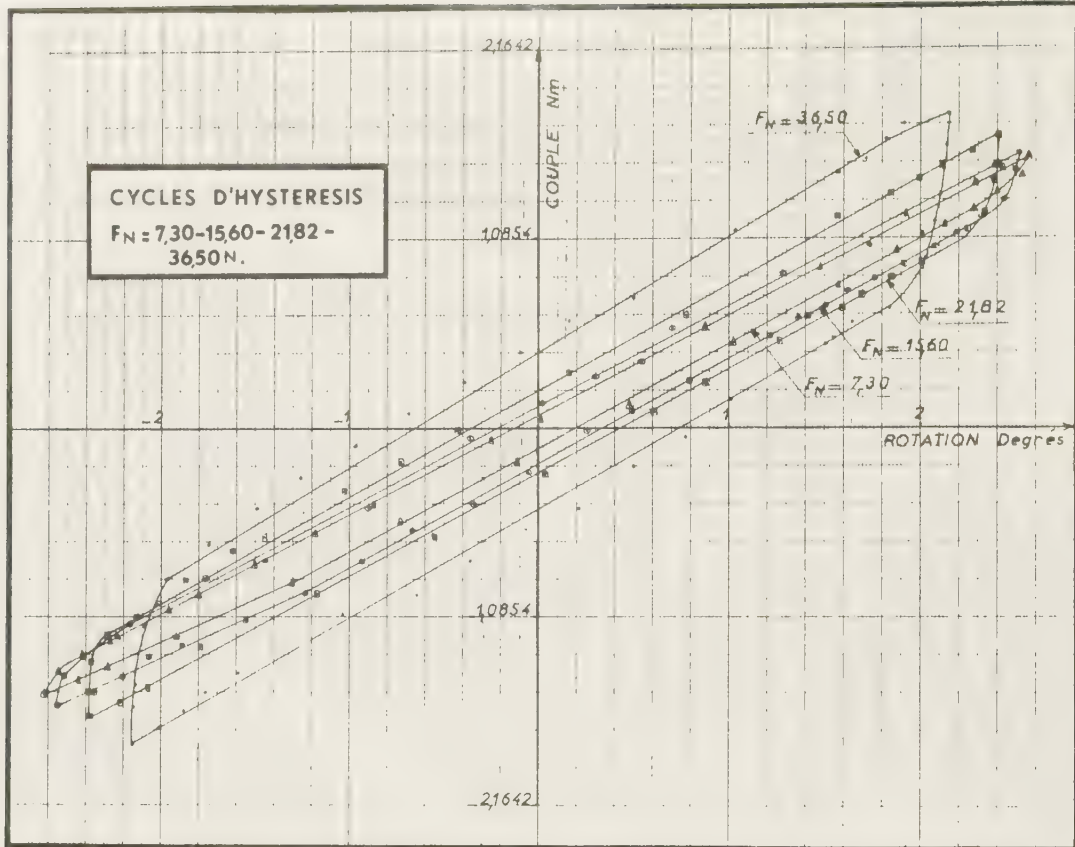


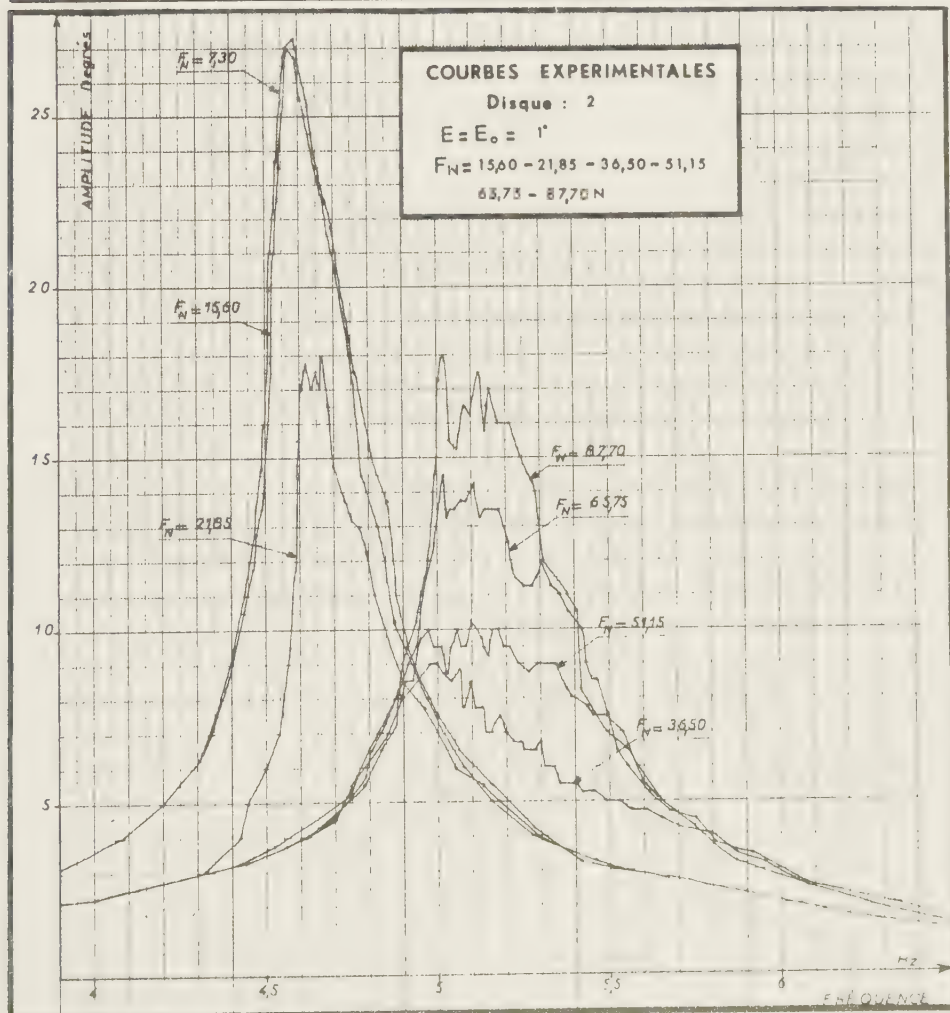
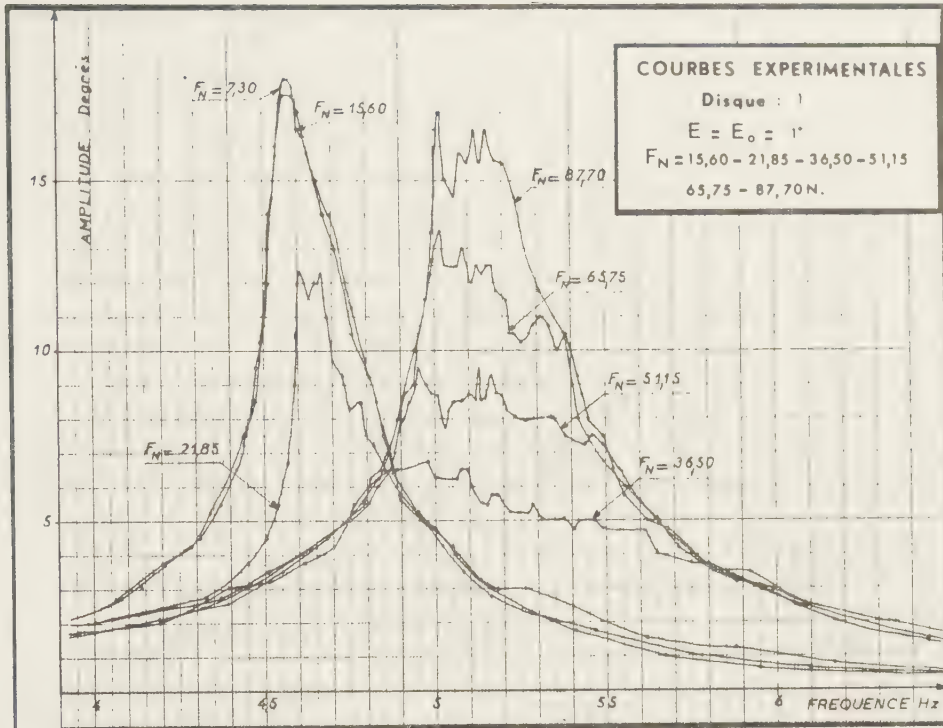


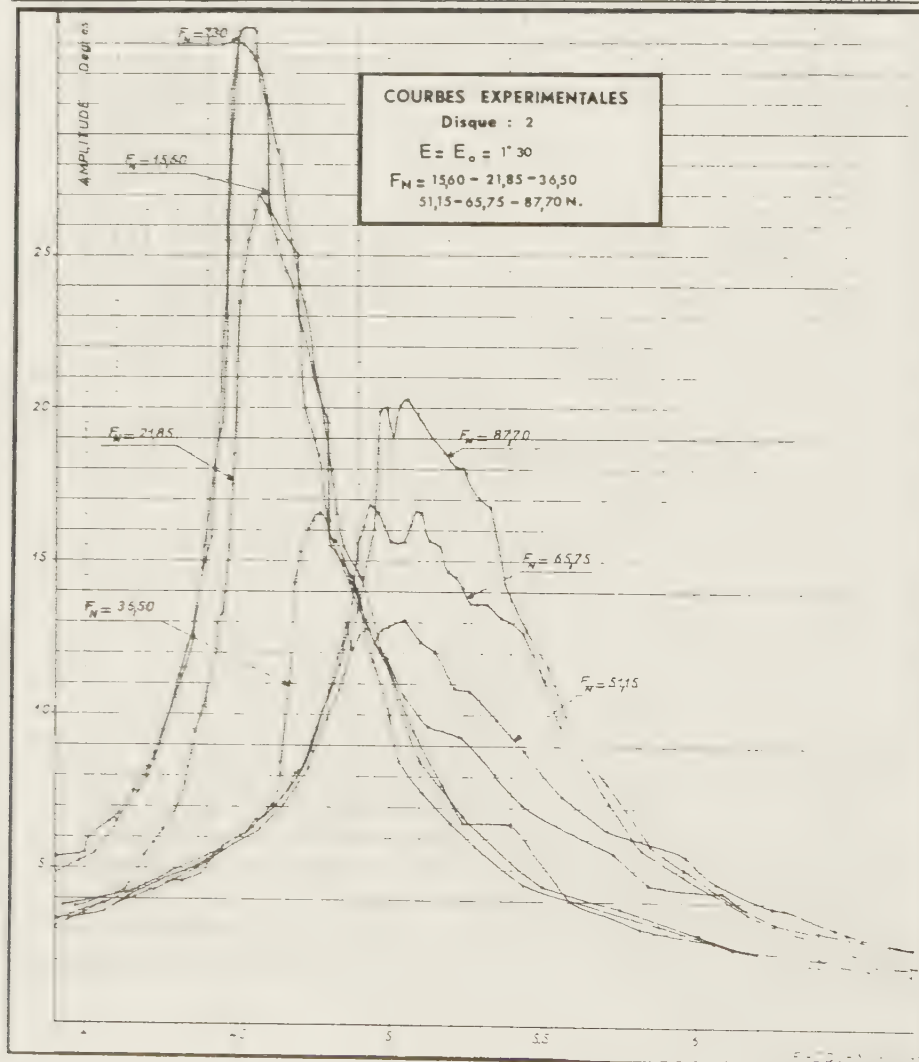
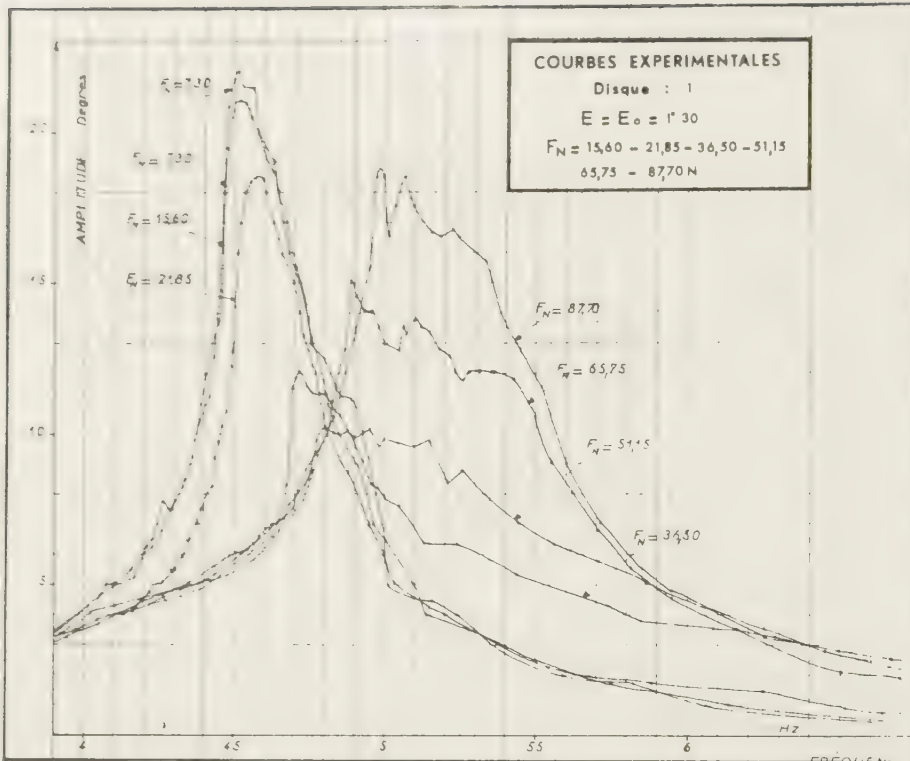


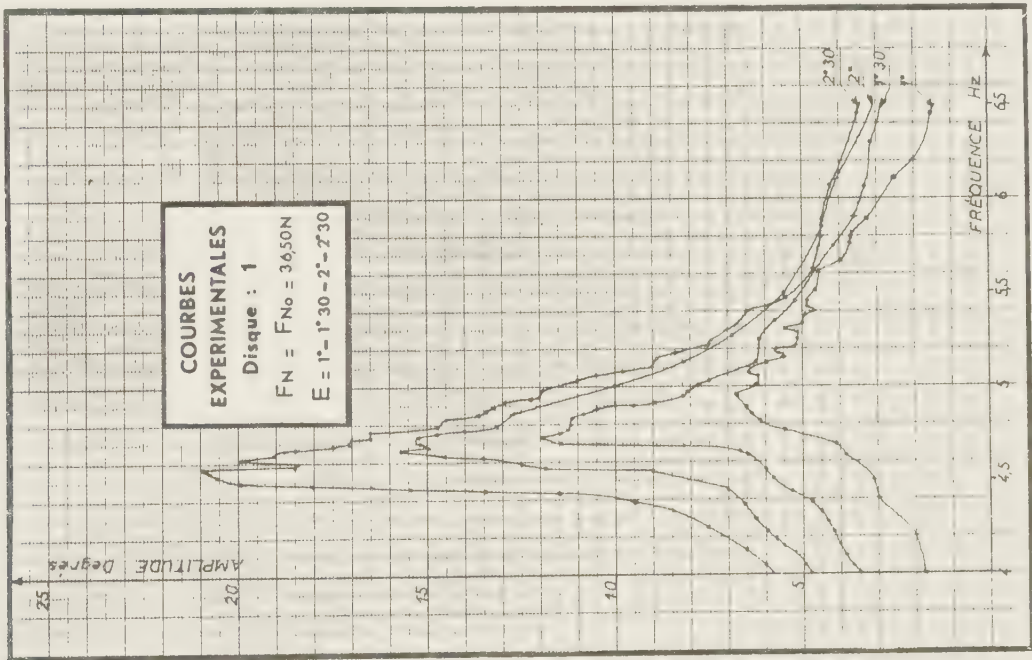
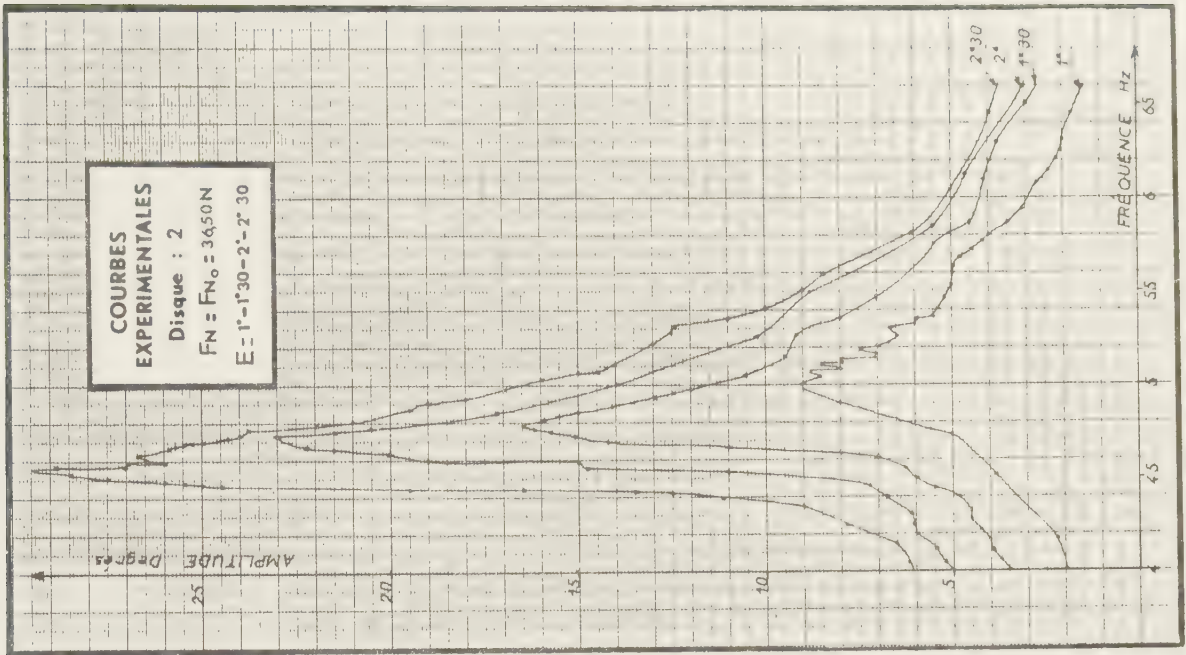
CHAÎNE CINEMATIQUE

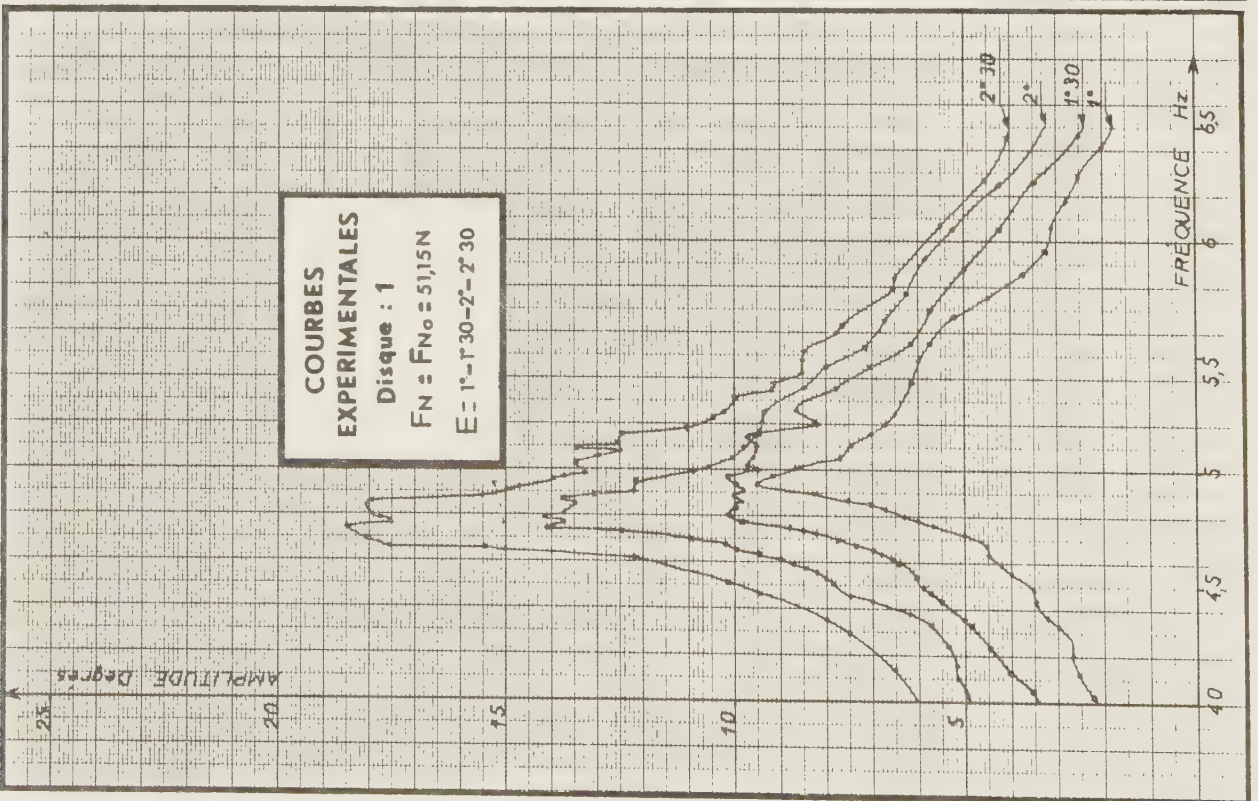
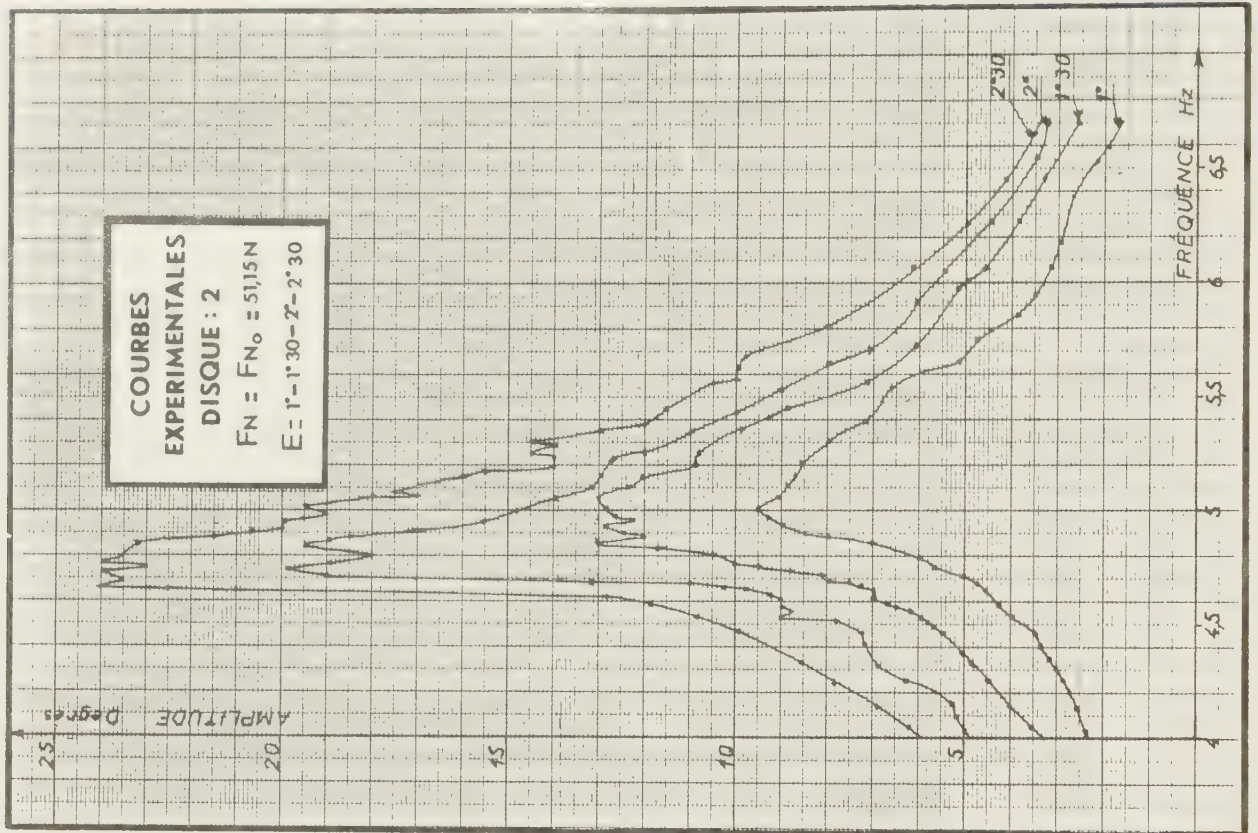


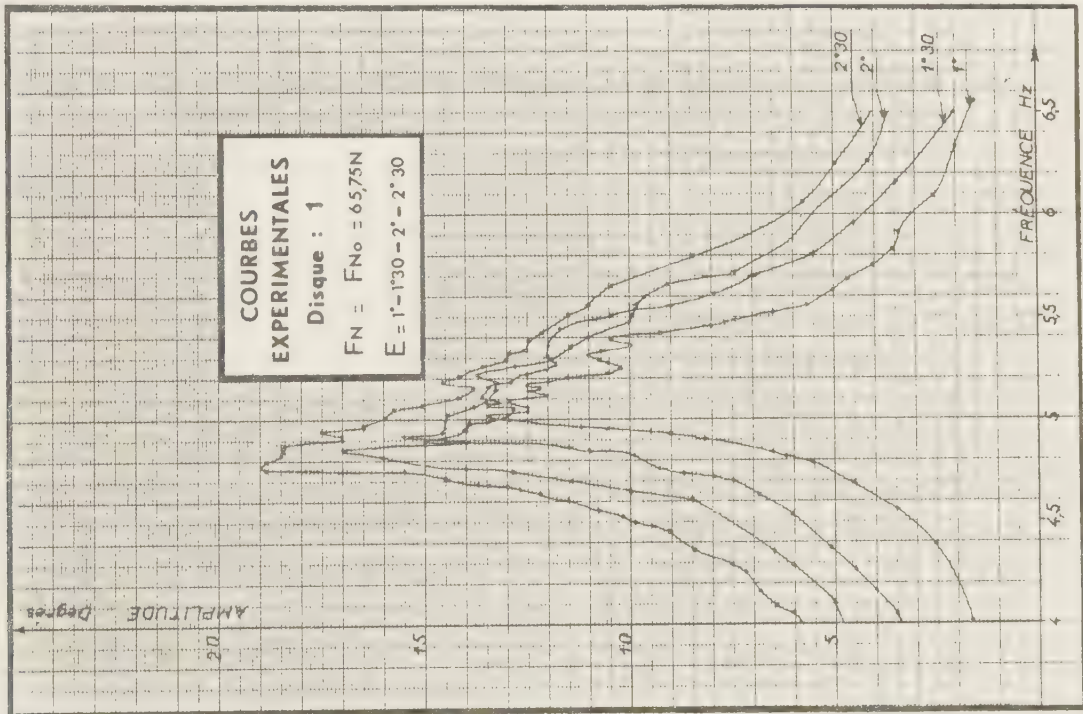
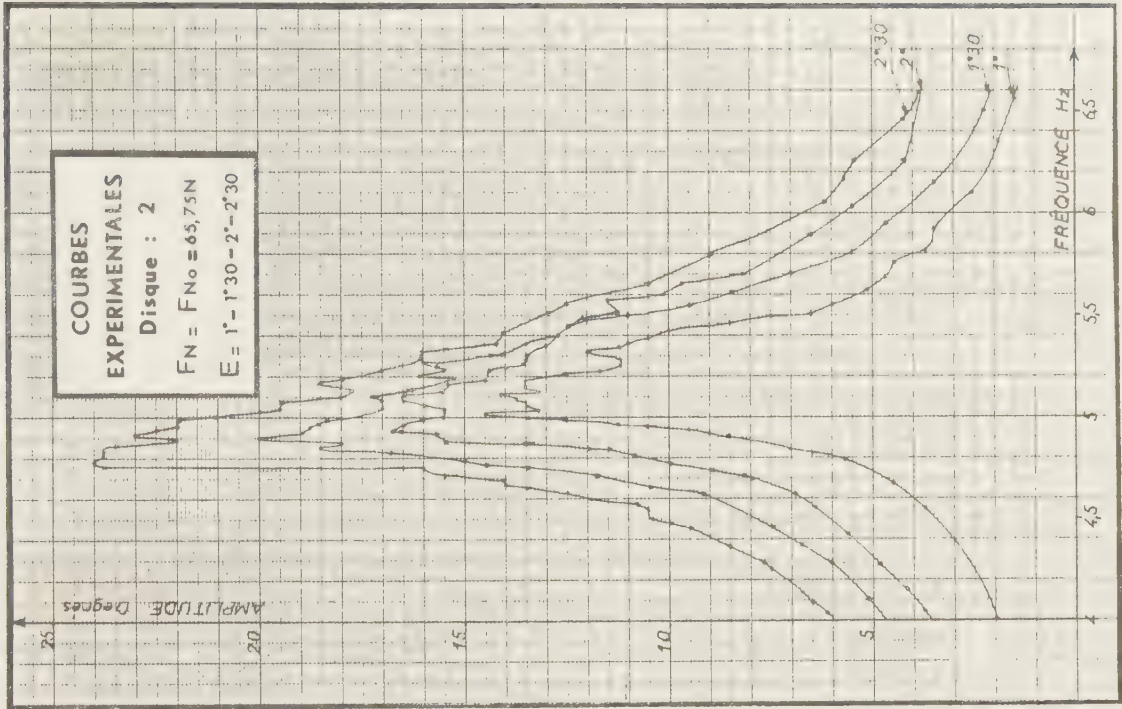


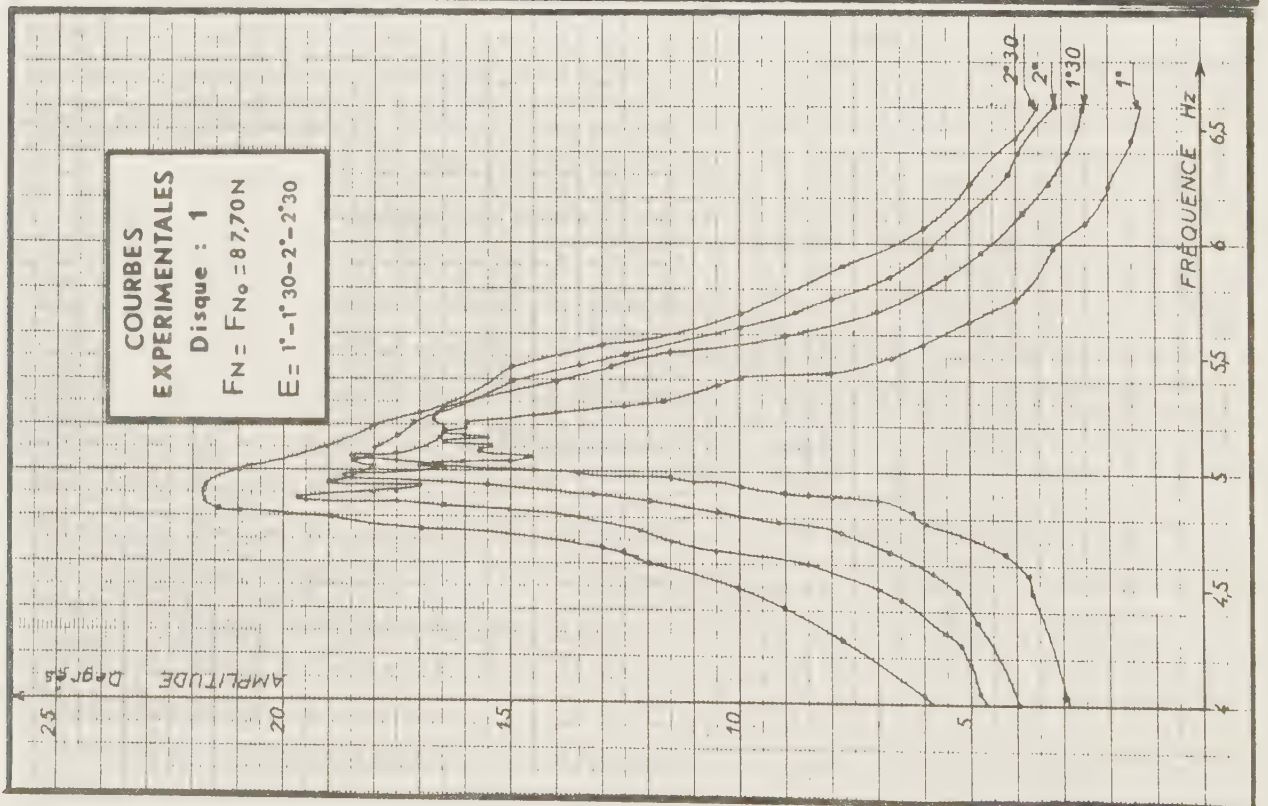
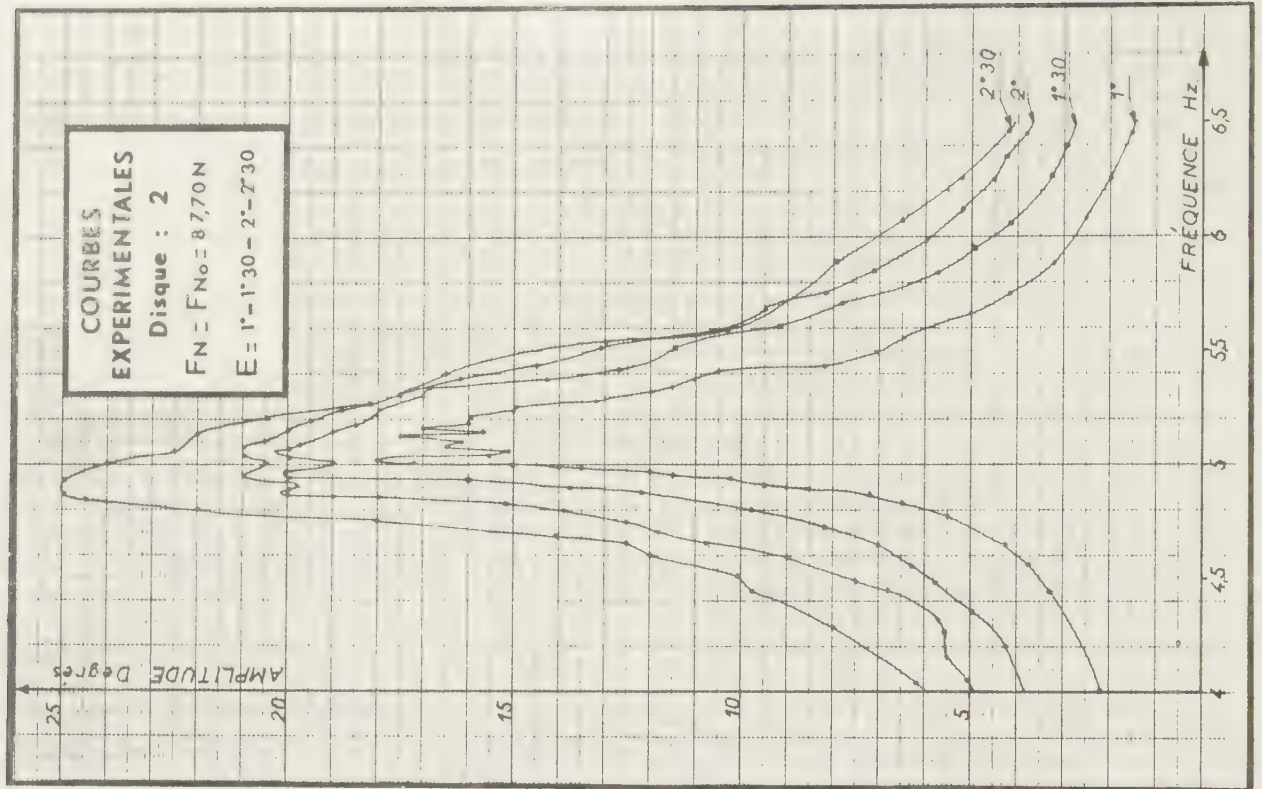


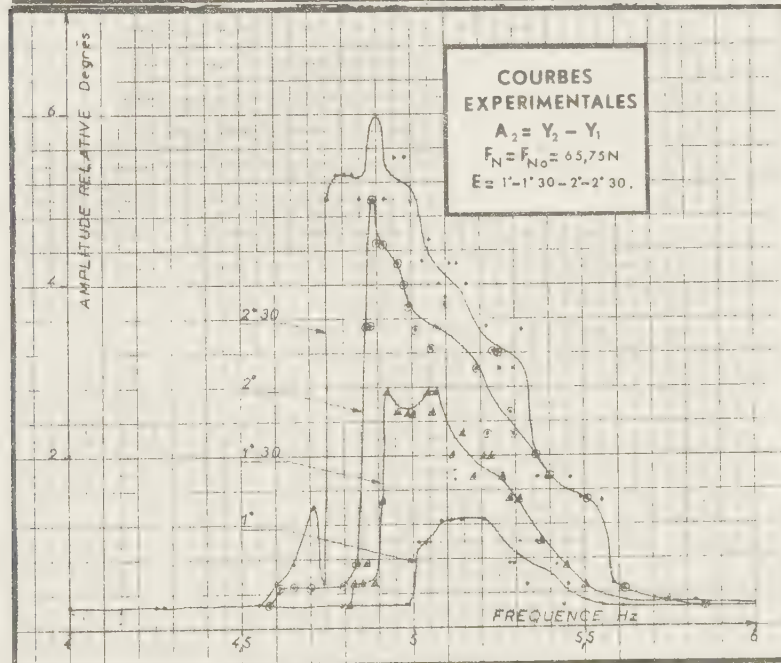
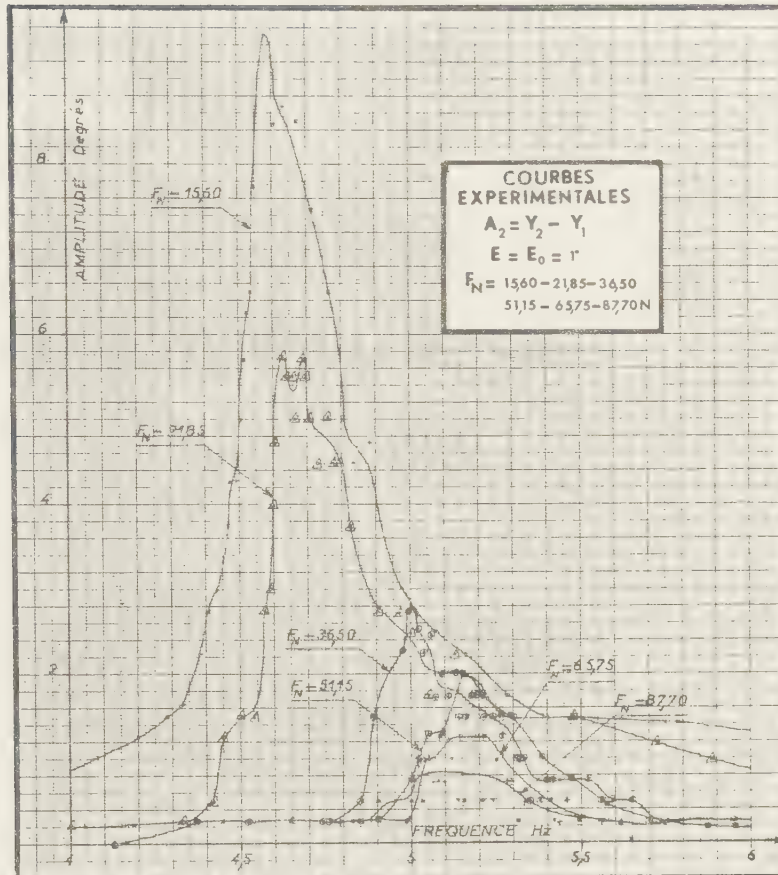


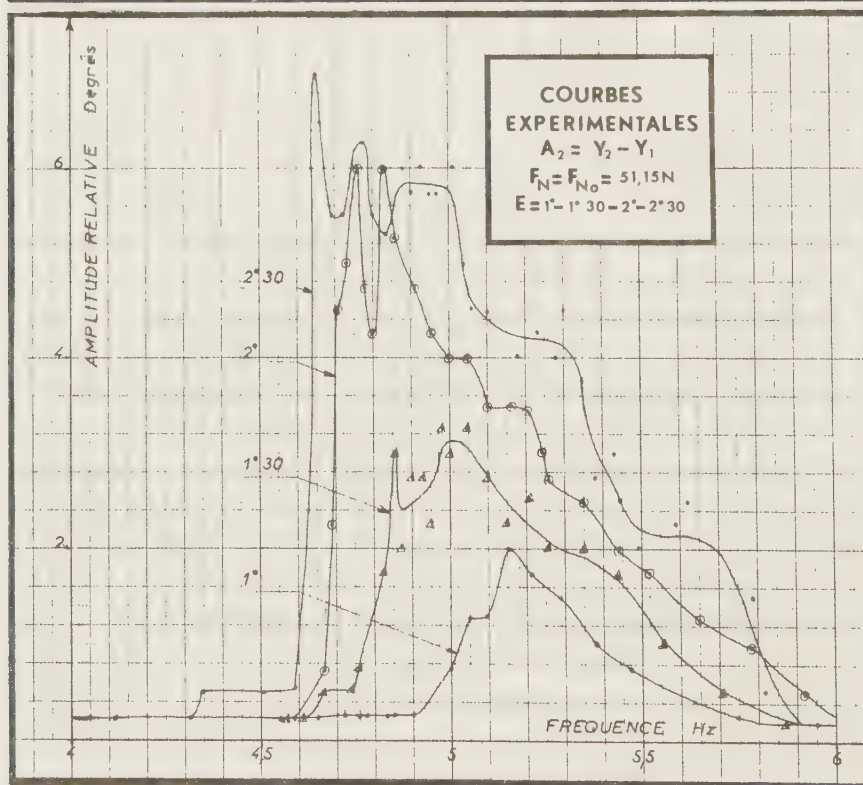
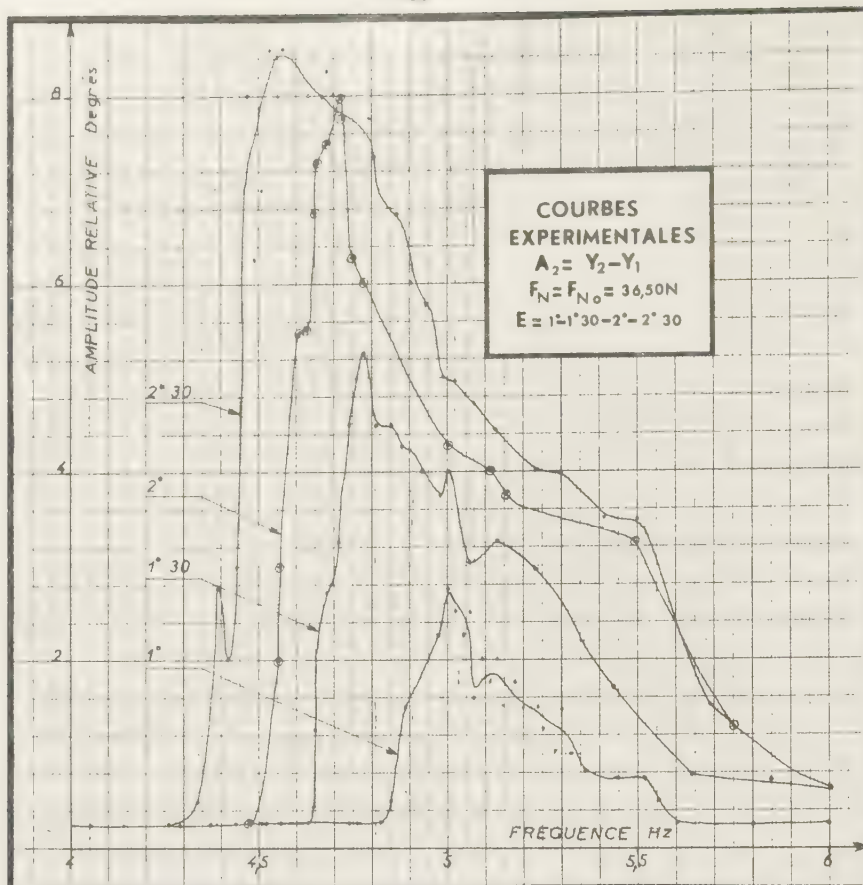


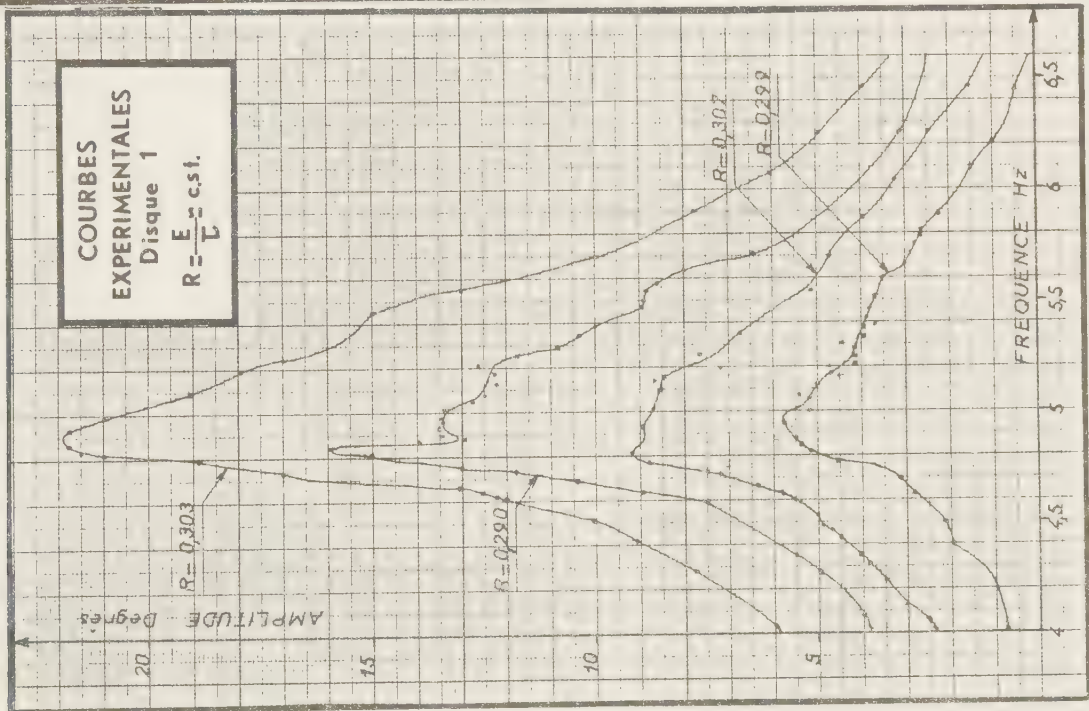
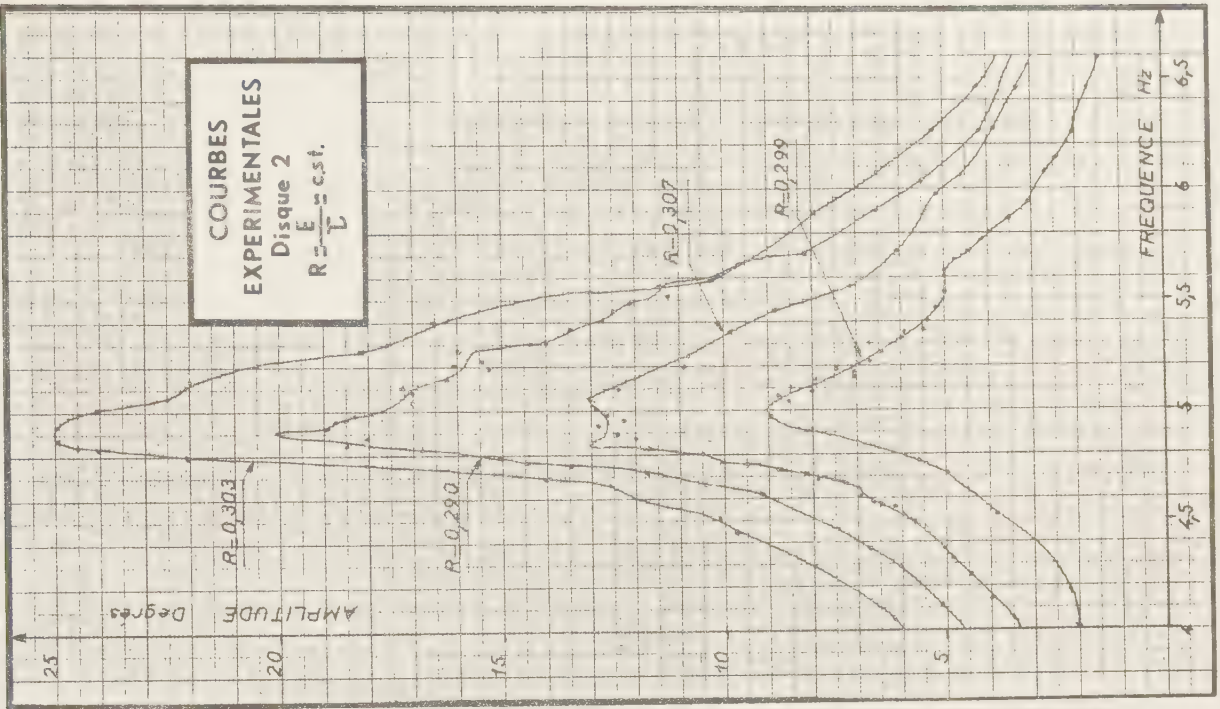


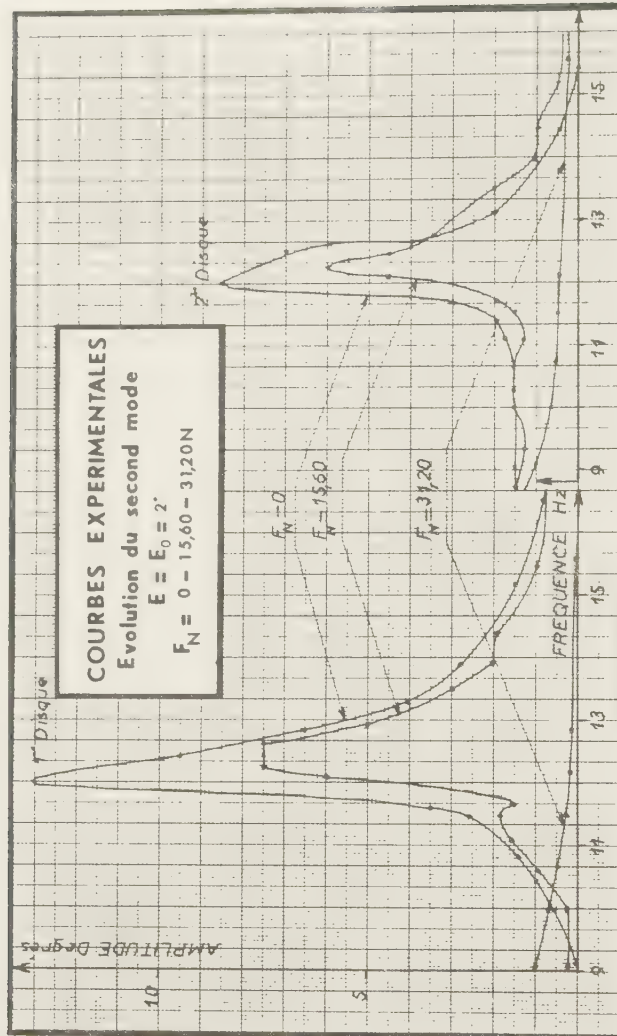
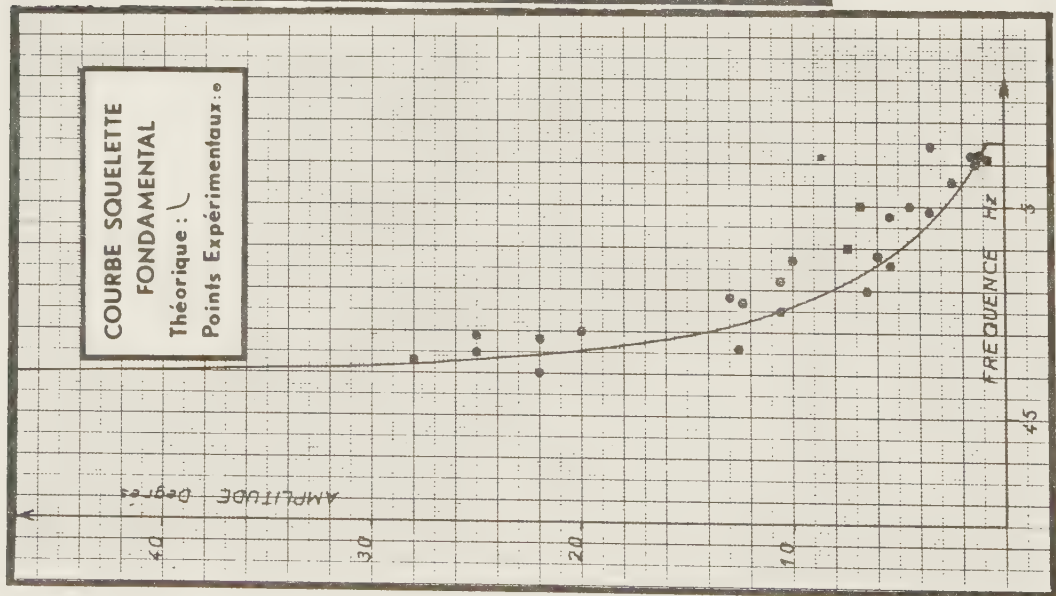












Chapitre Deuxième

ETUDE D'UN SYSTEME EN CHAÎNE A HYSTERESIS INTERNE

ET A VINGT DEGRES DE LIBERTE COUPLES



INTRODUCTION

Dans le premier chapitre, nous avons fait d'abord une étude statique qui nous a permis de tracer des cycles d'hystérésis et de connaître ainsi les forces au début des différentes phases de glissement. La connaissance de ces forces nous a permis la mise en équation et l'étude dynamique théorique. L'étude statique peut se faire de la même façon pour un système à n degrés de liberté couplés; les cycles d'hystérésis restent bilinéaires.

Aussi, dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier un système en chaîne à vingt degrés de liberté couplés possédant dix neuf points de frottement interne. L'étude statique nous montrera que nous avons bien affaire à nouveau à des cycles bilinéaires, et, comme dans le premier chapitre, l'étude statique nous permet de connaître $C(A)$ et $S(A)$ et donc, de faire l'étude dynamique.

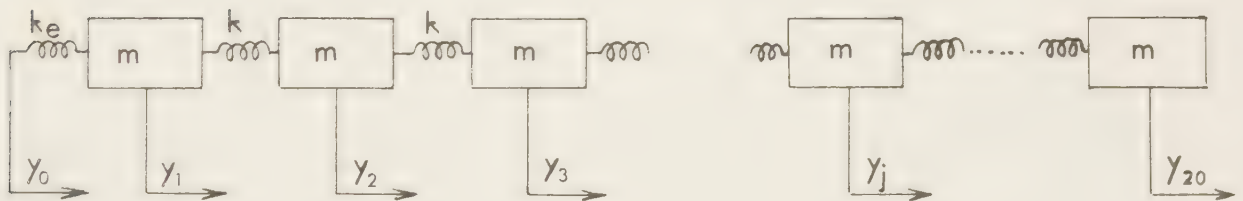
L'intérêt de ce chapitre réside dans l'extension de la méthode de variation des constantes à un système à n degrés de liberté couplés, ce qui nous permet, comme dans le premier chapitre, de tracer les courbes « squelettes », et, par conséquent, de donner une idée de la courbe de réponse du système et de nous montrer que tout ce qui avait été dit pour deux degrés est directement généralisable à un système à n degrés.

A - ETUDE THEORIQUE

1 - ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE

1.1 Préliminaires

Le schéma du système en chaîne à vingt degrés de liberté conservatif est le suivant:



Posons :

m : Masse élémentaire (20 masses identiques)

k_e : raideur d'entrée

k_i : raideur interdisques

y_i : déplacement absolu de la $i^{\text{ème}}$ masse

x_i : déplacement relatif des masses $(i); (i - 1)$ $x_i = y_i - y_{i-1}$

1.2 Mise en équation

Les théorèmes généraux de la mécanique nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + (k_e + k) y_1 - k y_2 &= k_e y_0 \\ m \ddot{y}_2 - k y_1 + 2k y_2 - k y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_i - k y_{i-1} + 2k y_i - k y_{i+1} = 0$$

$$m \ddot{y}_{20} - k y_{19} + k y_{20} = 0$$

Le système d'équation précédent peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] [\ddot{Y}] + [K] [Y] = [E] \quad (2)$$

Avec d'une manière explicite :

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 & & & \\ 0 & m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & m \end{bmatrix} & [Y] &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_i \\ y_{20} \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} (k_e + k) & -k & 0 & & \\ -k & 2k & -k & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & -k & 2k & -k \\ & & & 0 & -k & k \end{bmatrix} & [E] &= \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

1.3 Résolution - Valeurs propres

1.31 - Généralités

Ce qui nous intéresse ici, c'est de connaître les différentes fréquences propres de notre système afin de pouvoir étudier leurs évolutions dans le système non linéaire en fonction

des différents paramètres. Pour cela, nous allons écrire la relation qui existe entre la force et le déplacement de l'entrée de la chaîne et la force et le déplacement qui existent en fin de chaîne, relation qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_N \\ y_N \end{bmatrix} = [M_T] \begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$[M_T]$ étant la matrice de transfert.

$[M_T]$ peut encore s'écrire :

$$[M_T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5)$$

A partir de l'équation (4) nous pouvons écrire :

$$F_N = A \cdot F_0 + B \cdot y_0 \quad (1) \quad (6)$$

$$y_N = C \cdot F_0 + D \cdot y_0 \quad (2)$$

Considérons l'équation (6,1), qui nous exprime la force de sortie en fonction des paramètres d'entrée, nous savons, par constitution même de notre chaîne, que la deuxième extrémité de la chaîne est libre, aussi, cela se traduit par :

$$F_N \equiv 0 \quad (1) \text{ et d'après (6,1) :}$$

$$A \cdot F_0 + B \cdot y_0 = 0 \quad (2) \quad (7)$$

Or, nous recherchons les fréquences propres de notre système, c'est-à-dire, en oscillation libre, ce qui se traduit par :

$$y_0 \equiv 0 \quad (8)$$

et donc, pour que l'équation (7,2) soit satisfaite, il faut que :

$$A \equiv 0 \quad (9)$$

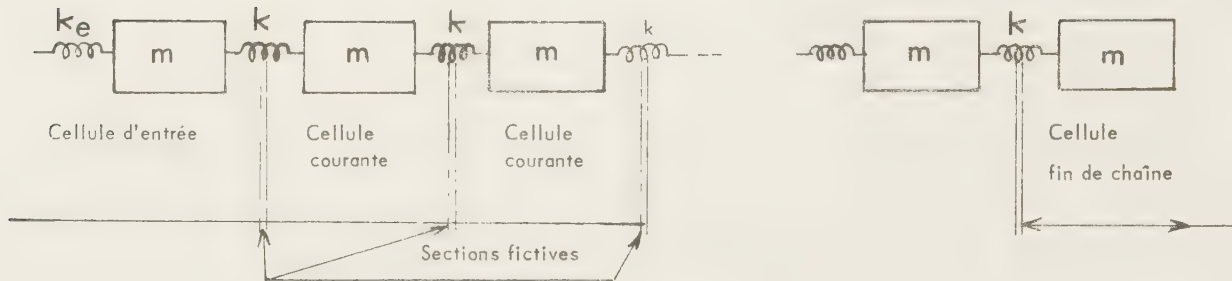
Les solutions de $A = 0$ nous donneront les fréquences propres du système.

Il nous faut donc déterminer la matrice de transfert globale $[M_T]$ et, en particulier, le terme « A ».

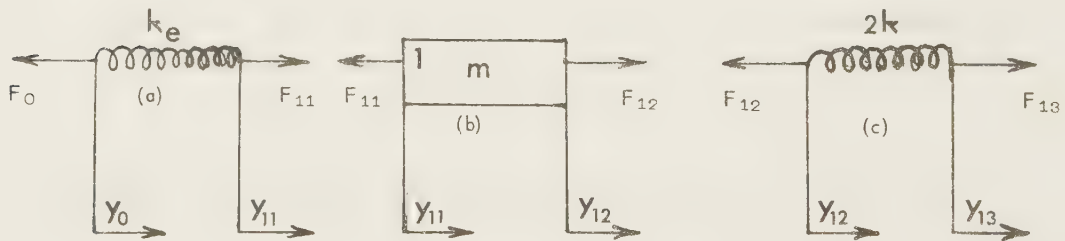
1,32 Calcul de la matrice de transfert

Pour cela, nous allons décomposer notre chaîne en différentes cellules, calculer la matrice de transfert local de chaque cellule, puis, faire le produit.

Revenons au schéma de notre chaîne :



1,321 - Cellule d'Entrée



A partir de cette cellule, elle-même décomposée, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ y_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{k_e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{12} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ y_{11} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} F_{13} \\ y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2K} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ y_{12} \end{bmatrix}$$

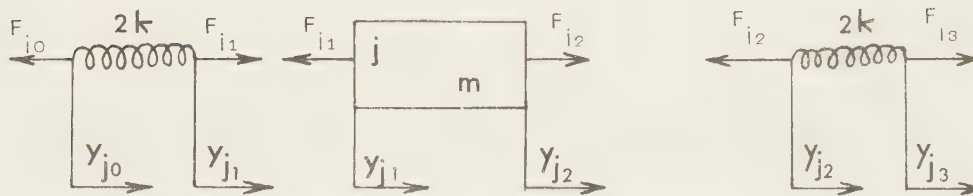
En remplaçant $\begin{bmatrix} F_{12} \\ y_{12} \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} F_{11} \\ y_{11} \end{bmatrix}$ et, par suite $\begin{bmatrix} F_{11} \\ y_{11} \end{bmatrix}$

en fonction de $\begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_{13} \\ y_{13} \end{bmatrix} = [M_{Te}] \begin{bmatrix} F_o \\ y_o \end{bmatrix} \text{ avec } [M_{TE}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k_e} & -m\omega^2 \\ \frac{1}{2K} \left(1 - \frac{m\omega^2}{k_e} \right) + \frac{1}{k_e} & 1 - \frac{m\omega^2}{2K} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$[M_{Te}]$ est la matrice de transfert de la cellule d'entrée.

1,322 Cellule courante



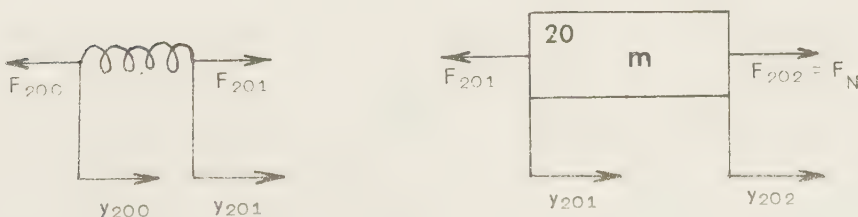
De la même manière que précédemment, il vient :

$$\begin{bmatrix} F_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i0} \\ y_{i0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{i3} \\ y_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix}$$

D'où, tout calcul fait, la matrice de transfert de la cellule courante :

$$\begin{bmatrix} F_{i3} \\ y_{i3} \end{bmatrix} = [M_{Tc}] \begin{bmatrix} F_{i0} \\ y_{i0} \end{bmatrix} \text{ Avec } [M_{Tc}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{2k} & -m\omega^2 \\ \frac{1}{k} \left[1 - \frac{m\omega^2}{4K} \right] & 1 - \frac{m\omega^2}{2k} \end{bmatrix} \quad (11)$$

1,323 Cellule de sortie (fin de chaîne)



Il vient :

$$\begin{bmatrix} F_{20.1} \\ y_{20.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{20.0} \\ y_{20.0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} F_{20.2} \\ y_{20.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{20.1} \\ y_{20.1} \end{bmatrix}$$

D'où la matrice de transfert de la cellule de sortie :

$$\begin{bmatrix} F_{20.2} \\ y_{20.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{2k} & -m\omega^2 \\ \frac{1}{2k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{20.0} \\ y_{20.0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_{20.2} \\ y_{20.2} \end{bmatrix} = [M_{Ts}] \begin{bmatrix} F_{20.0} \\ y_{20.0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pour calculer la matrice de transfert global, il nous suffit d'effectuer le produit des différentes matrices de transfert des différentes cellules, ce qui se traduit en définitif par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} F_{20.2} \\ y_{20.2} \end{bmatrix} = M_{Ts} \cdot M_{Tc}^{18} \cdot M_{Te} \begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Pour effectuer ce produit, nous allons poser :

$$\text{ch } a = 1 - \frac{m\omega^2}{2k} \quad (14)$$

$$Z_0 = \frac{\text{sh } a}{\frac{4k - m\omega^2}{4k^2}} \quad (15)$$

En fonction de ces nouveaux paramètres, les différentes matrices de transfert s'écrivent tout calcul fait :

$$\begin{aligned} [M_{Tc}] &= \begin{bmatrix} \text{ch } a & Z_0 \text{sh } a \\ \frac{\text{sh } a}{Z_0} & \text{ch } a \end{bmatrix} \quad \text{d'où } [M_{Tc}]^{18} = \begin{bmatrix} \text{ch } 18a & Z_0 \text{sh } 18a \\ \frac{\text{sh } 18a}{Z_0} & \text{ch } 18a \end{bmatrix} \\ [M_{Ts}] &= \begin{bmatrix} \text{ch } a & Z_0 \text{sh } a \\ \frac{\text{ch } a - 1}{Z_0 \cdot \text{sh } a} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$[M_{Te}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_0 \operatorname{sh} a}{k_e} & Z_0 \operatorname{sh} a \\ \frac{\operatorname{ch} a - 1}{Z_0 \operatorname{sh} a} + \frac{\operatorname{ch} a}{k_e} & \operatorname{ch} a \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors effectuer le produit et obtenir la matrice de transfert global et écrire l'équation :

$$\begin{bmatrix} F_{20 \cdot 2} \\ y_{20 \cdot 2} \end{bmatrix} = [M_{TG}] \begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$M_{TG} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\operatorname{sh} 20 a}{\operatorname{sh} a} + \frac{Z_0}{k_e} \operatorname{sh} 20 a - \frac{\operatorname{sh} 19 a}{\operatorname{sh} a} \right] & (Z_0 \operatorname{sh} 20 a) \\ \left[\frac{\operatorname{sh} 20 a - 2 \operatorname{sh} 19 a + \operatorname{sh} 18 a}{Z_0 \operatorname{sh}^2 a} + \frac{\operatorname{sh} 20 a - \operatorname{sh} 19 a}{k_e \operatorname{sh} a} \right] & \left[\frac{\operatorname{sh} 20 a - \operatorname{sh} 19 a}{\operatorname{sh} a} \right] \end{bmatrix} \quad (18)$$

Or, d'après l'équation (9) nous avons vu que les fréquences propres du système nous seront données par :

$$A = 0$$

$$A = \frac{\operatorname{sh} 20 a}{\operatorname{sh} a} + \frac{Z_0}{k_e} \operatorname{sh} 20 a - \frac{\operatorname{sh} 19 a}{\operatorname{sh} a} = 0 \quad (19)$$

Posons $a = j b$ il vient :

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} j b = \cos b = 1 - \frac{m \omega^2}{2 k} \quad (20)$$

$$\text{d'où l'on tire : } \omega = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin \frac{b}{2} \quad (21)$$

Reportons cette valeur de ω dans l'expression de Z_0 :

$$\begin{aligned} \text{par définition : } Z_0 &= \frac{\operatorname{sh} a}{\frac{4 k - m \omega^2}{4 k^2}} = \frac{\operatorname{sh} j b}{\frac{4 k - m 4 \frac{k}{m} \sin^2 \frac{b}{2}}{4 k^2}} \\ Z_0 &= \frac{j k \sin b}{\cos \frac{b}{2}} \end{aligned} \quad (22)$$

et l'équation (19) s'écrit alors :

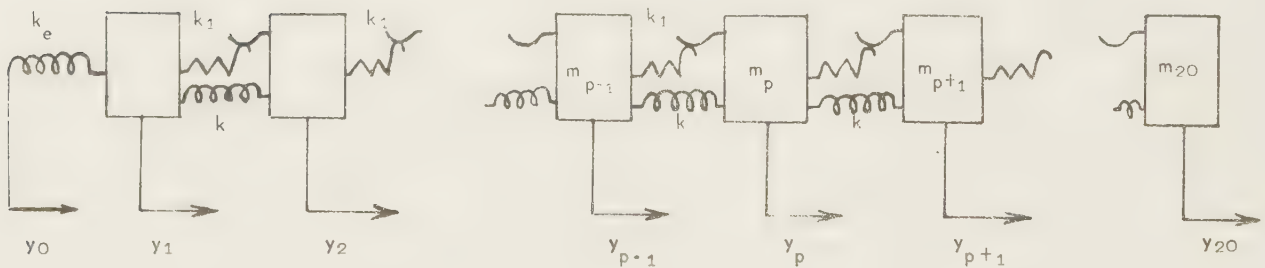
$$\frac{\sin 20 b}{\sin b} - \frac{\sin 19 b}{\sin b} - \frac{k}{k_e} \cdot \frac{\sin b \cdot \sin 20 b}{\cos \frac{2b}{2}} = 0 \quad (23)$$

Cette équation nous donne les différentes valeurs de b qui répondent à la question $A = 0$ et par suite, par report dans l'équation 21 nous obtenons les pulsations propres du système. L'équation (23) a été résolue par calcul numérique sur I.B.M. 650.

2 - ETUDE DU SYSTEME NON LINEAIRE

2,1 Mise en équation

Le schéma du système est alors le suivant :



Posons :

τ : force de glissement supposée constante au cours du temps, c'est-à-dire que f coefficient de frottement est supposé constant

k_1 : raideur en série avec le frotteur

$K = k + k_1$ raideur inter-masse lorsqu'il n'y a pas glissement

$g_p(x_p, \dot{x}_p)$: expression la plus générale de la force existante entre les masses " $P - 1$ " et " P "

d_0 : amplitude de début de glissement : $d_0 = \frac{\tau}{K}$

y_0 : $r \cos \omega t$; avec r = constante réglable ; excitation déplacement.

D'après les théorèmes généraux de la mécanique, les équations s'écrivent :

$$m \ddot{y}_1 = -k_e (y_1 - y_0) + g_2(x_2, \dot{x}_2)$$

$$m \ddot{y}_2 = -g_2(x_2, \dot{x}_2) + g_3(x_3, \dot{x}_3)$$

(1)

$$m \ddot{y}_p = -g_p(x_p, \dot{x}_p) + g_{p+1}(x_{p+1}, \dot{x}_{p+1})$$

$$m \ddot{y}_{20} = -g_{20}(x_{20}, \dot{x}_{20})$$

Exprimons ces équations en fonction de $y_1, x_2 \dots x_p \dots x_{20}$, nous avons, par hypothèse

$$y_2 = y_1 + x_2$$

(2)

$$y_p = y_1 + \sum_{i=1}^p x_i$$

et

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \ddot{x}_2$$

$$\ddot{y}_p = \ddot{y}_1 + \sum_{i=1}^p \ddot{x}_i$$

(3)

Les équations du système (1) s'écrivent alors :

$$m \ddot{y}_1 + k_e y_1 - g_2(x_2, \dot{x}_2) = k_e y_0 \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_1 + m \ddot{x}_2 + g_2(x_2, \dot{x}_2) - g_3(x_3, \dot{x}_3) = 0 \quad (2)$$

$$m \ddot{y}_1 + m \ddot{x}_2 + m \ddot{x}_3 + g_3(x_3, \dot{x}_3) - g_4(x_4, \dot{x}_4) = 0 \quad (3)$$

(4)

$$m \left[\ddot{y}_1 + \sum_{i=1}^{p-1} \ddot{x}_i \right] + m \ddot{x}_p + g_p(x_p, \dot{x}_p) - g_{p+1}(x_{p+1}, \dot{x}_{p+1}) = 0 \quad (P)$$

$$m \left[\ddot{y}_1 + \sum_{i=1}^{19} \ddot{x}_i \right] + m \ddot{x}_{20} + g_{20}(x_{20}, \dot{x}_{20}) = 0 \quad (20)$$

Eliminons $m \ddot{y}_1$ dans l'équation (4,2)

$$\text{D'après (4,1) : } m \ddot{y}_1 = k_e y_0 - k_e y_1 + g_2(x_2, \dot{x}_2)$$

En reportant cette valeur dans (4,2) il vient :

$$m \ddot{x}_2 - k_e y_1 + 2 g_2(x_2, \dot{x}_2) - g_3(x_3, \dot{x}_3) = -k_e y_0 \quad (5)$$

De même, éliminons $(m \ddot{y}_1 + m \ddot{x}_2)$ dans l'équation (4,3)

$$\text{D'après (4,2) : } m \ddot{y}_1 + m \ddot{x}_2 = -g_2(x_2, \dot{x}_2) + g_3(x_3, \dot{x}_3)$$

et ainsi de suite pour toutes les équations (4,i) $i = 2 - 3 \dots \dots \dots 20$

En définitive, le système d'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + k_e y_1 - g_2(x_2, \dot{x}_2) &= E \cos \omega t && \text{avec } E = k_e \cdot r \\ m \ddot{x}_2 - k_e y_1 + 2 g_2(x_2, \dot{x}_2) - g_3(x_3, \dot{x}_3) &= -E \cos \omega t && \text{et } y_0 = r \cdot \cos \omega t \\ m \ddot{x}_3 - g_2(x_2, \dot{x}_2) + 2 g_3(x_3, \dot{x}_3) - g_4(x_4, \dot{x}_4) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$m \ddot{x}_p - g_{p-1}(x_{p-1}, \dot{x}_{p-1}) + 2 g_p(x_p, \dot{x}_p) - g_{p+1}(x_{p+1}, \dot{x}_{p+1}) = 0$$

$$m \ddot{x}_{20} - g_{19}(x_{19}, \dot{x}_{19}) + 2 g_{20}(x_{20}, \dot{x}_{20}) = 0$$

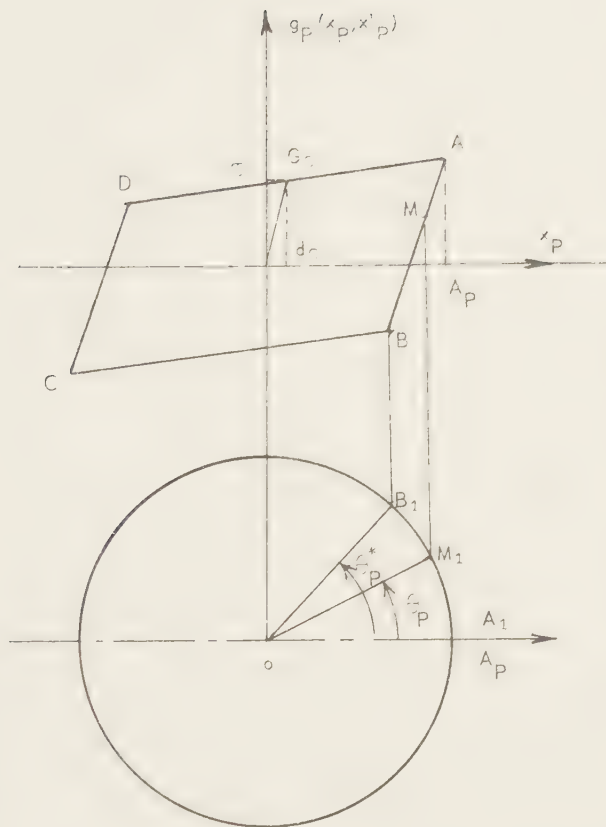
2,2 Cycle d'hystérésis

Nous avons posé $g_p(x_p, \dot{x}_p)$ comme étant l'expression de la force qui s'exerce entre les masses $(P - 1)$ et (P) , aussi, pour résoudre le système d'équations (6) nous faut-il connaître exactement l'expression de $g_p(x_p, \dot{x}_p)$.

Pratiquement, la forme de $g_p(x_p, \dot{x}_p)$ sera déterminée par des essais statiques en effectuant le verrouillage du disque $(P - 1)$ et en appliquant un couple cyclique sur le disque (P) et en notant pour chaque valeur du couple la rotation relative. Nous supposons que l'expression de $g_p(x_p, \dot{x}_p)$ sera constante quel que soit P .

Le cycle théorique aura une allure identique à celle du système à deux degrés de liberté, seul, le rapport des pentes sera différent.

La force $g_p(x_p, \dot{x}_p)$ représentée par le cycle ci-après sera complètement déterminée par les équations de ses différents segments.



En dynamique, le point figuratif M parcourt tout le pourtour du cycle fermé (sans passer par l'origine).

Le temps de parcours du cycle est égal à la période.

2,21 - Equation des différents segments

Les calculs sont les mêmes que ceux effectués dans le premier chapitre. aussi, nous bornerons-nous ici à rappeler les résultats.

$$\text{Equation DA : } y_{DA} = k x_P + (\tau - k d_0)$$

$$\text{Equation CB : } y_{CB} = k x_P - (\tau - k d_0) \quad (7)$$

$$\text{Equation AB : } y_{AB} = K x_P + (K - k)(d_0 - A_P)$$

$$\text{Equation CD : } y_{CD} = K x_P - (K - k)(d_0 - A_P)$$

D'autre part, nous voyons que le point figuratif M, en supposant que le point figura-

tif parte du point A, sera sur le segment A B jusqu'à ce que $\theta_P = \theta_P^*$ pris sur le segment B C pour $\theta_P^* \leq \theta_P \leq P$: θ_P^* marque le changement de « régime » (variation de la raideur interne) .

$$\text{Nous avons également calculé : } \cos \theta_P^* = 1 - \frac{2 d_0}{A_P} \quad (8)$$

Nous pouvons remarquer que le cycle est symétrique par rapport à l'origine, et qu'il suffira de faire l'étude sur un demi-cycle.

2,3 Méthode de Calcul

2,31 Principe de la méthode

Pour résoudre le système d'équation (6) régissant le mouvement de la chaîne, nous allons utiliser comme dans le premier chapitre, la méthode de variation des constantes de Krylov et Bogolioubov.

Par analogie avec l'étude des systèmes linéaires en régime permanent, nous cher-

chons des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= A_2 \cos \theta_2 \\ x_P &= A_P \cdot \cos \theta_P \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_{20} = A_{20} \cos \theta_{20}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } \theta_1 &= \omega t - \varphi_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 - \varphi_2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\theta_P = \theta_{P-1} - \varphi_P$$

$$\theta_{20} = \theta_{10} - \varphi_{20}$$

Les déphasages φ_P étant introduits pour que les amplitudes A_P soient toujours positives. Dans le cas linéaire et autour du fondamental $\varphi_P = 0$ pour $\omega < \omega_{01}$ et $\varphi_P = \pi$ si $\omega > \omega_{01}$.

Dans le cas non linéaire, la méthode consiste à conserver la même forme de réponse, mais cette fois l'amplitude A_P et la phase φ_P sont considérées comme fonction du temps, mais fonction lentement variable du temps.

$$\begin{aligned} A_P &= A_P(t) \\ \varphi_P &= \varphi_P(t) \end{aligned} \quad \text{à variation lente}$$

2,32 Calcul

Il nous faut maintenant exprimer notre système d'équations (6) en fonction des nouvelles variables.

Dérivons les équations (9) par rapport au temps

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\omega A_1 \sin \theta_1 + \dot{A}_1 \cos \theta_1 + A_1 \dot{\varphi}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= -\omega A_2 \sin \theta_2 + \dot{A}_2 \cos \theta_2 + A_2 \dot{\varphi}_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

(11)

$$\dot{x}_P = -\omega A_P \sin \theta_P + \dot{A}_P \cos \theta_P + A_P \dot{\varphi}_2 \sin \theta_P$$

$$\dot{x}_{20} = -\omega A_{20} \sin \theta_{20} + \dot{A}_{20} \cos \theta_{20} + A_{20} \dot{\varphi}_{20} \sin \theta_{20}$$

Nous supposons que la forme des vitesses $\frac{dy_1}{dt}$ et $\frac{dx_P}{dt}$ reste comparable à celle qu'elles auraient dans le cas d'un système linéaire.

De sorte que nous devons avoir :

$$\frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1 = -\omega A_1 \cos \theta_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -\omega A_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{dx_P}{dt} = \dot{x}_P = -\omega A_P \cos \theta_P \quad (11)$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = \dot{x}_{20} = -\omega A_{20} \cos \theta_{20}$$

Ce qui entraîne, d'après le système d'équations (11) :

$$\frac{dA_1}{dt} \cos \theta_1 + A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \sin \theta_1 = 0$$

$$\frac{dA_2}{dt} \cos \theta_2 + A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 = 0$$

(12)

$$\frac{dA_P}{dt} \cos \theta_P + A_P \frac{d\varphi_P}{dt} \sin \theta_P = 0$$

$$\frac{dA_{20}}{dt} \cos \theta_{20} + A_{20} \frac{d\varphi_{20}}{dt} \sin \theta_{20} = 0$$

Après ces considérations, les dérivées secondes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\omega^2 A_1 \cos \theta_1 + \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 - \omega \frac{dA_1}{dt} \sin \theta_1 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 A_2 \cos \theta_2 + \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 - \omega \frac{dA_2}{dt} \sin \theta_2\end{aligned}\quad (13)$$

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = -\omega^2 A_p \cos \theta_p + \omega A_p \frac{d\varphi_p}{dt} \cos \theta_p - \omega \frac{dA_p}{dt} \sin \theta_p$$

$$\frac{d^2 x_{20}}{dt^2} = -\omega^2 A_{20} \cos \theta_{20} + \omega A_{20} \frac{d\varphi_{20}}{dt} \cos \theta_{20} - \omega \frac{dA_{20}}{dt} \sin \theta_{20}$$

En substituant, dans le système d'équations (6) $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 x_p}{dt^2}$ par leur valeur

et en faisant $m = 1$ il vient :

$$\begin{aligned}-\omega^2 A_1 \cos \theta_1 + \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 - \omega \frac{dA_1}{dt} \sin \theta_1 + k_e y_1 - g_2(x_2, \dot{x}_2) &= E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \\ -\omega^2 A_2 \cos \theta_2 + \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 - \omega \frac{dA_2}{dt} \sin \theta_2 - k_e y_1 + 2 g_2(x_2, \dot{x}_2) - g_3(x_3, \dot{x}_3) &= -E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \\ -\omega^2 A_p \cos \theta_p + \omega A_p \frac{d\varphi_p}{dt} \cos \theta_p - \omega \frac{dA_p}{dt} \sin \theta_p - g_{p-1}(x_{p-1}, \dot{x}_{p-1}) + 2 g_p(x_p, \dot{x}_p) - g_{p+1}(x_{p+1}, \dot{x}_{p+1}) &= 0 \\ -\omega^2 A_{20} \cos \theta_{20} + \omega A_{20} \frac{d\varphi_{20}}{dt} \cos \theta_{20} - \omega \frac{dA_{20}}{dt} \sin \theta_{20} - g_{10}(x_{10}, \dot{x}_{10}) + 2 g_{20}(x_{20}, \dot{x}_{20}) &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

Ainsi, le système d'équations différentielles du deuxième ordre (6) est remplacé par les deux systèmes à 20 équations du premier ordre (12) et (14).

Ce système (12 - 14) à 40 équations du premier ordre, peut se simplifier par des combinaisons linéaires entre équations correspondantes des deux systèmes.

Effectuons les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Equation (12,1)} \cdot \omega \cos \theta_1 &= \text{Equation (14,1)} \cdot \sin \theta_1 & (1) \\
 \text{Equation (12,1)} \cdot \omega \sin \theta_1 &+ \text{Equation (14,1)} \cos \theta_1 & (1') \\
 \text{Equation (12,2)} \cdot \omega \cos \theta_2 &= \text{Equation (14,2)} \sin \theta_2 & (2) \\
 \text{Equation (12,2)} \cdot \omega \sin \theta_2 &+ \text{Equation (14,2)} \cos \theta_2 & (2')
 \end{aligned} \tag{15}$$

D'une manière générale :

$$\begin{aligned}
 \text{Equation (12,P)} \cdot \omega \cos \theta_P &= \text{Equation (14,P)} \sin \theta_P & (P) \\
 \text{Equation (12,P)} \cdot \omega \sin \theta_P &+ \text{Equation (14,P)} \cos \theta_P & (P')
 \end{aligned}$$

Les équations telles que (15,P) permettent d'éliminer $\frac{d\varphi_P}{dt}$ et d'obtenir une équation en $\frac{dA_P}{dt}$ alors que celles telles que (15,P') nous conduisent à des équations en $\frac{d\varphi_P}{dt}$ après élimination de $\frac{dA_P}{dt}$.

Tout calcul fait et après simplification, nous obtenons le système de 40 équations du premier ordre suivant

$$\begin{aligned}
 \omega \frac{dA_1}{dt} + \omega^2 A_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - k_e y_1 \sin \theta_1 + g_2(A_2, \theta_2) \sin \theta_1 &= -E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \sin \varphi_1 \\
 \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \omega^2 A_1 \cos^2 \theta_1 + k_e y_1 \cos \theta_1 - g_2(A_2, \theta_2) \cos \theta_1 &= E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \cos \theta_1 \\
 \omega \frac{dA_2}{dt} + \omega^2 A_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + k_e y_1 \sin \theta_2 - 2g_2(A_2, \theta_2) \sin \theta_2 + g_3(A_3, \theta_3) \sin \theta_2 &= +E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \sin \theta_2 \\
 \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega^2 A_2 \cos^2 \theta_2 - k_e y_1 \cos \theta_2 + 2g_2(A_2, \theta_2) \cos \theta_2 - g_3(A_3, \theta_3) \cos \theta_2 &= -E \cos(\theta_1 + \varphi_1) \cos \theta_2 \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega \frac{dA_P}{dt} + \omega^2 A_P \cos \theta_P \sin \theta_P + g_{P-1}(A_{P-1}, \theta_{P-1}) \sin \theta_P - 2g_P(A_P, \theta_P) \sin \theta_P + g_{P+1}(A_{P+1}, \theta_{P+1}) \sin \theta_P &= 0 \\
 \omega A_P \frac{d\varphi_P}{dt} - \omega^2 A_P \cos^2 \theta_P - g_{P-1}(A_{P-1}, \theta_{P-1}) \cos \theta_P + 2g_P(A_P, \theta_P) \cos \theta_P - g_{P+1}(A_{P+1}, \theta_{P+1}) \cos \theta_P &= 0
 \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, nous avons supposé que les variables A_P et φ_P ; $1 \leq P \leq 20$; étaient des fonctions lentement variables du temps, aussi, peuvent-elles être remplacées, sur une période, par leurs valeurs moyennes, et non plus, par leurs valeurs instantanées.

Desormais, les symboles A_P et φ_P représenteront les valeurs moyennes sur une période de l'amplitude et de la phase. Il en sera de même pour $\frac{dA_P}{dt}$ et $\frac{d\varphi_P}{dt}$ qui représenteront désormais les variations moyennes de A_P et φ_P sur une période.

Pour cela, multiplions par $d\theta_P$ les différentes équations de (16) et intégrons de $[0; 2\pi]$ avec, d'après (9) et (10)

$$y_1 = A_1 \cos \theta_1$$

$$\theta_1 = \omega t - \varphi_1$$

$$x_P = A_P \cos \theta_P$$

et

$$\theta_P = \theta_{P-1} - \varphi_P$$

Tout calcul fait, nous obtenons la nouvelle forme suivante du système d'équations(16)

$$2\omega \frac{dA_1}{dt} + \frac{\cos \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2 \sin \theta_2 d\theta_2 + \frac{\sin \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2 \cos \theta_2 d\theta_2 = E \sin \varphi_1$$

$$2\omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \omega^2 A_1 + k_e A_1 - \frac{\cos \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2 \cos \theta_2 \cdot d\theta_2 + \frac{\sin \varphi_2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2 \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 = E \cos \varphi_1$$

$$2\omega \frac{dA_2}{dt} - k_e A_1 \sin \varphi_2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2 \sin \theta_2 \cdot d\theta_2 + \frac{\cos \varphi_3}{\pi} \int_0^{2\pi} g_3 \cdot \sin \theta_3 \cdot d\theta_3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\sin \varphi_3}{\pi} \int_0^{2\pi} g_3 \cdot \cos \theta_3 \cdot d\theta_3 = - E \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$2\omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega^2 A_2 - k_e A_1 \cos \varphi_2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(A_2, \theta_2) \cdot \cos \theta_2 d\theta_2 - \frac{\cos \varphi_3}{\pi} \int_0^{2\pi} g_3 \cdot \cos \theta_3 d\theta_3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\sin \varphi_3}{\pi} \int_0^{2\pi} g_3 \sin \theta_3 d\theta_3 = - E \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

(17)

$$2\omega \frac{dA_P}{dt} + \frac{\cos \varphi_{P+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \sin \theta_{P+1} d\theta_{P+1} - \frac{\sin \varphi_P}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \cos \theta_{P+1} \cdot d\theta_{P+1} - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_P \sin \theta_P \cdot d\theta_P +$$

$$+ \frac{\cos \varphi_{P+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \sin \theta_{P+1} d\theta_{P+1} + \frac{\sin \varphi_{P+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \cos \theta_{P+1} d\theta_{P+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 2 \omega A_P \frac{d\varphi_P}{dt} - \omega^2 A_P - \frac{\cos \varphi_P}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P-1} \cos \theta_{P-1} d\theta_{P-1} - \frac{\sin \varphi_P}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P-1} \sin \theta_{P-1} d\theta_{P-1} + \dots \\
 \dots + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g_P \cos \theta_P d\theta_P - \frac{\cos \varphi_{P+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \cos \theta_{P+1} d\theta_{P+1} + \dots \\
 \dots + \frac{\sin \varphi_{P+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} g_{P+1} \sin \theta_{P+1} d\theta_{P+1} = 0
 \end{aligned}$$

Posons :

$$C_P = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_P(A_P, \theta_P) \cos \theta_P d\theta_P \text{ pour } P = 2, 3, \dots, 20$$

et

$$S_P = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_P(A_P, \theta_P) \sin \theta_P d\theta_P \quad (18)$$

En définitive, les systèmes d'équations (12) et (14) prennent finalement la forme suivante

$$2 \omega \frac{dA_1}{dt} + S_2 \cos \varphi_2 + C_2 \sin \varphi_2 = E \sin \varphi_1 \quad (1)$$

$$2 \omega A_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \omega^2 A_1 + k_e A_1 - C_2 \cos \varphi_2 + S_2 \sin \varphi_2 = E \cos \varphi_1 \quad (1')$$

$$2 \omega \frac{dA_2}{dt} - k_e A_1 \sin \varphi_2 - 2 S_2 + S_3 \cos \varphi_3 + C_3 \sin \varphi_3 = -E \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (2)$$

$$2 \omega A_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega^2 A_2 - k_e A_1 \cos \varphi_2 + 2 C_2 - C_3 \cos \varphi_3 + S_3 \sin \varphi_3 = -E \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (2')$$

(19)

$$2 \omega \frac{dA_P}{dt} + S_{P-1} \cos \varphi_P - C_{P-1} \sin \varphi_P - 2 S_P + S_{P+1} \cos \varphi_{P+1} + C_{P+1} \sin \varphi_{P+1} = 0 \quad (P)$$

$$2 \omega A_P \frac{d\varphi_P}{dt} - \omega^2 A_P - C_{P-1} \cos \varphi_P - S_{P-1} \sin \varphi_P + 2 C_P - C_{P+1} \cos \varphi_{P+1} + S_{P+1} \sin \varphi_{P+1} = 0 \quad (P')$$

2,4 Expression de $C_P(A_P)$ et $S_P(A_P)$

Le cycle théorique étant identique, au rapport de pentes près, l'expression littérale de C_P et de S_P sera la même que pour le premier chapitre, aussi, nous nous bornerons à rappeler les résultats :

$$\begin{aligned}
 S_P(A_P) &= -\frac{4}{\pi} \left[(K - k)(A_P - d_0) \cdot \frac{d_0}{A_P} \right] \quad \text{pour } A_P \geq d_0 \\
 S_P(A_P) &= 0 \quad \text{pour } A_P \leq d_0 \\
 C_P(A_P) &= \frac{A_P}{2} \left[(K - k) \left(\frac{d_0}{A_P} - \frac{\sin 2 \cdot \frac{d_0}{A_P}}{2} \right) + k \right] \quad \text{pour } A_P \geq d_0 \\
 C_P(A_P) &= K \cdot A_P \quad \text{pour } A_P \leq d_0
 \end{aligned} \tag{20}$$

En remplaçant C_P et S_P ; $P = 2, 3, \dots, 20$ dans les équations (19), nous obtenons un système de 40 équations à 40 inconnues qui répondent à notre problème, les inconnues étant A_P et φ^∞ avec $P = 1, 2, 3, \dots, 20$.

2,5 Etude du mouvement en régime permanent

Lorsque le régime permanent est établi, c'est-à-dire, que tout transitoire a disparu, l'amplitude et la phase restent constantes, aussi, nous pouvons écrire que :

$$\frac{d A_P}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d \varphi_P}{dt} = 0 \tag{21}$$

Adoptons l'indice « 0 » pour montrer qu'il s'agit du régime permanent, le système d'équations (19) s'écrit alors :

$$S_{20} \cdot \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20} = E \sin \varphi_{10} \tag{1}$$

$$-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20} = E \cos \varphi_{10} \tag{1'}$$

$$-k A_{10} \sin \varphi_{20} - 2 S_{20} + S_{30} \cos \varphi_{30} + C_{30} \sin \varphi_{30} = E \sin(\varphi_{10} + \varphi_{20}) \tag{2}$$

$$-\omega^2 A_{20} - k A_{10} \cos \varphi_{20} + 2 C_{20} - C_{30} \cos \varphi_{30} + S_{30} \sin \varphi_{30} = -E \cos(\varphi_{10} + \varphi_{20}) \tag{2'}$$

$$+ S_{P-10} \cos \varphi_{P0} - C_{P-10} \sin \varphi_{P0} - 2 S_{P0} + S_{P+10} \cos \varphi_{P+10} + C_{P+10} \sin \varphi_{P+10} = 0 \quad (P)$$

$$-\omega^2 A_{P0} - C_{P-10} \cos \varphi_{P0} - S_{P-10} \sin \varphi_{P0} + 2 C_{P0} - C_{P+10} \cos \varphi_{P+10} + S_{P+10} \sin \varphi_{P+10} = 0 \quad (P')$$

En éliminant $\cos \varphi_{10}$ et $\sin \varphi_{10}$ dans (22, 1) et (22, 1') il vient :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{10} &= \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{E} \\ \cos \varphi_{10} &= \frac{-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}}{E} \end{aligned} \quad (24) \text{ ou } \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{10} &= \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{-\omega^2 A_{10} + k A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}} \end{aligned}$$

φ_{10} étant le déphasage de la réponse du premier disque par rapport à la phase de l'excitation.

Elevons les deux équations (22,1) et (22,1') au carré et faisons la somme membre à membre, nous obtenons :

$$E^2 = S_{20}^2 + C_{20}^2 + [k A_{10} - \omega^2 A_{10}] [k A_{10} - \omega^2 A_{10} - 2 C_{20} \cos \varphi_{20} + 2 S_{20} \sin \varphi_{20}] = 0 \quad (25)$$

Rapportons les valeurs de $\sin \varphi_{10}$ et $\cos \varphi_{10}$ dans les équations (22,2) et (22,2').

Tout calcul effectué, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{20} &= \frac{S_{30} \cos \varphi_{30} + C_{30} \sin \varphi_{30} - S_{20}}{\omega^2 A_{10}} \\ \cos \varphi_{20} &= \frac{-\omega^2 A_{20} + C_{20} - C_{30} \sin \varphi_{30} + S_{30} \sin \varphi_{30}}{\omega^2 A_{10}} \end{aligned} \quad (26)$$

Théoriquement, on peut calculer successivement les différents déphasages, mais cela serait extrêmement lourd et non exploitable en calcul littéral. Seule une très puissante machine à calculer est capable de résoudre d'une manière numérique le système (22) de 40 équations à 40 inconnues, ce qui nous permettrait de connaître, quelle que soit la fréquence, les valeurs de A_p et φ_p .

L'étude complète des courbes de réponses présente surtout un intérêt théorique; la comparaison la plus importante est celle qui se situe autour de la résonance de phase, aussi, nous bornerons-nous ici à étudier les courbes de réponses autour de cette résonance de phase, étant donné, comme nous le montrerons dans le paragraphe suivant, que, théoriquement, la résonance de phase est strictement confondue avec la résonance d'amplitude. Cette propriété est particulièrement intéressante, car, en effet, pour une structure réelle, il est fondamental de connaître quelles seront les déformations maximales que la structure aura à subir, et, par suite, la mise en cause de sa résistance mécanique, ce qui se produira pour la résonance d'amplitude et donc de phase.

2,6 Etude à la résonance de phase

Nous avons établi dans le paragraphe précédent que dans le cas général et en régime permanent, $\operatorname{tg} \varphi_{10}$ peut s'écrire :

$$\operatorname{tg} \varphi_{10} = \frac{S_{20} \cos \varphi_{20} + C_{20} \sin \varphi_{20}}{-\omega^2 A_{10} + k_e A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20}} \quad (24')$$

Or, à la résonance de phase, nous avons, par définition:

$$\varphi_{10} = \frac{\pi}{2} \text{ ce qui s'exprime par : } \operatorname{tg} \varphi_{10} = \infty$$

ou encore d'après (24)'

$$-\omega^2 A_{10} + k_e A_{10} - C_{20} \cos \varphi_{20} + S_{20} \sin \varphi_{20} = 0 \quad (27)$$

$$\text{D'autre part } \varphi_P = 0 \text{ ou } \pi \quad P = 2; 3; \dots; 20 \quad \cos \varphi_P = \pm 1 \quad (28)$$

L'équation (27) devient :

$$-\omega^2 A_{10} + k_e A_{10} \pm C_{20} = 0 \quad (29)$$

Pour le fondamental $\cos \varphi_P = +1$ la pulsation s'écrit :

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_e A_{10} - C_{20}}{A_{10}} \quad (30)$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\omega_{01}^2 = k_e - N_2 \frac{C_{20}}{A_{20}} \quad (31)$$

$$\text{avec } N_2 = \frac{A_{20}}{A_{10}} \quad (32)$$

ce qui vous montre que lorsque A_{20} et donc N_2 varient, il en va de même pour ω_{01}^2

Reprenons l'équation (25) et faisons $\varphi_{20} = 0$ (résonance de phase)

Il vient :

$$E^2 = S_{20}^2 + C_{20}^2 + [k A_{10} - \omega^2 A_{10}] [k A_{10} - \omega^2 A_{10} - 2 C_{20}] \quad (33)$$

d'où une nouvelle expression de ω_{01}^2

Tout calcul fait, on trouve :

$$\omega_{01}^2 = k_e - \frac{C_{20}}{A_{10}} \pm \left[(k A_{10} - C_{20} A_{10})^2 - A_{10}^2 (S_{20}^2 + C_{20}^2 - E^2 - 2 C_{20} k_e A_{10}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Il y aura résonance d'amplitude pour $[\dots]^{\frac{1}{2}} = 0$

D'où la pulsation à la résonance d'amplitude :

$$\omega_r = k_e - \frac{C_{20}}{A_{10}} \quad (35)$$

Nous voyons que la résonance d'amplitude est exprimée par la même expression que la résonance de phase et donc qu'elles sont strictement confondues.

L'expression (31) ou (35) nous montre que si nous faisons varier A_{20} , nous obtenons une courbe $A_{20} = f(\omega)$ qui sera le lien des points où il y aura résonance de phase et d'amplitude dans le plan $(\omega; A_{20})$, chaque point de cette courbe correspond à une valeur bien déterminée de l'amplitude d'excitation et de la force de frottement, et, en particulier, comme nous le montrerons plus loin, à un rapport bien particulier de ces deux grandeurs.

2,7 Courbe « squelette »

D'après l'équation (34) nous voyons que la courbe de réponse se situe de part et d'autre, et d'une manière symétrique, de la courbe $A_{20} = f(\omega)$ définie précédemment.

Cette courbe donne donc l'allure générale de la courbe de réponse totale tout en situant exactement son maximum d'où le vocable de « courbe squelette ».

Cette courbe a pour équation $\omega_{01}^2 = k_e - \frac{C_{20}}{A_{20}} N_2$ avec $N_2 = \frac{A_{20}}{A_{10}}$ et donc pour tracer cette courbe, il nous faut calculer $\frac{C_{20}}{A_{20}}$ et la valeur de $N(A_{20})$. Or, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre paragraphe (2,71) N dépend de la raideur équivalente inter-masses, donc de $\frac{C(A)_{20}}{A_{20}}$ et, par suite du vecteur propre et dans le cas de deux degrés, nous avons pu expliciter N d'une manière littérale, mais avec vingt degrés cela est impossible, aussi, allons-nous faire appel à une autre méthode de calcul direct des pulsations de résonance de phase et d'amplitude.

2,8 Détermination des fréquences propres lorsqu'il y a frottement

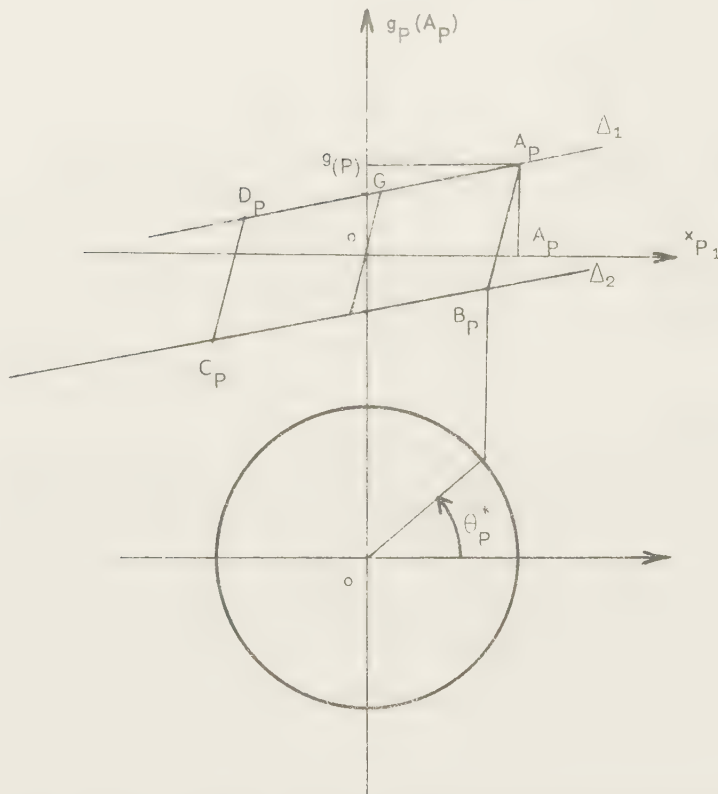
2,81 Principe de la méthode

La méthode développée dans les paragraphes précédents de Krylov et Bogolioubov consiste à remplacer le frottement sec par une raideur équivalente et un amortissement équivalent qui sont fonction de l'amplitude relative des différents paramètres, elle-même fonction du rapport force d'excitation sur force de frottement. Cette méthode nous donne en outre la raideur équivalente K_{ep} en fonction de A_p amplitude relative du paramètre (P) et $(P - 1)$ et donc si l'on connaît A_p on connaît K_{ep} et, si l'on connaît K_{ep} quel que soit (P) on peut calculer directement les fréquences propres.

Pour déterminer les fréquences propres, tout revient donc à chercher quelles sont les

amplitudes relatives et, par suite, les raideurs équivalentes, K_{eP} et fréquences propres correspondantes.

2,82 Raideurs équivalentes



Comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, la raideur équivalente s'écrit :

$$K_{eP} = \frac{C(A_P)}{A_{(P)}}$$

Comme dans le premier chapitre on peut s'imposer A_2 et donc K_{e2} et essayer de déterminer les $K_{e,P}$ $P = 3, \dots, 20$ par rapport à K_{e2} , c'est ce que nous allons effectuer.

Revenons au cycle d'hystérésis inter-disques.

Comme, par construction, notre chaîne est homogène, tous les cycles sont « identiques » et sont représentés par le graphe ci-contre, les droites Δ_1 et Δ_2 étant fixées pour un frottement donné, les segments

$A_P B_P$ et $D_P C_P$ étant plus ou moins éloignés de l'origine suivant que A_P est plus ou moins grand.

Le cycle d'hystérésis nous montre que si l'on connaît A_P on connaît $g_P(P)$ force de liaison des paramètres $(P - 1)$ et (P) et inversement. Puisque nous nous fixons A_2 nous obtenons immédiatement $g_2(A_2)$, il nous reste à déterminer une relation existant entre $g_2(A_2)$ et $g_P(A_P)$ pour connaître les différents A_P et, par suite, K_{eP} .

Pour rechercher cette relation, nous allons considérer le système homogène à 20 degrés de liberté conservatif et, plus particulièrement, ses vecteurs propres qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$Z_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \alpha_2 \\ 1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 + \sum_{i=2}^P \alpha_i \\ 1 + \sum_{i=2}^{20} \alpha_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

Il s'agit du système conservatif linéaire, cette linéarité peut se traduire en écrivant que le déplacement est proportionnel à la force, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} F_1 &= k_e & f_P \text{ étant la « force interne » qui existe entre} \\ F_2 &= \alpha_2 \cdot k & \text{les paramètres } (P-1) \text{ et } (P) \text{ lors d'une vibra-} \\ F_3 &= \alpha_3 \cdot k & \text{tion sur un mode propre (en posant égale à} \\ & & 1 \text{ l'amplitude du premier paramètre).} \\ F_P &= \alpha_P \cdot k \\ F_{20} &= \alpha_{20} \cdot k \end{aligned} \quad (37)$$

Faisons le rapport membre à membre des différentes forces f_P à f_1 , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{F_1} &= \frac{k}{k_e} \cdot \alpha_2 = \Gamma_{21} \\ \frac{F_P}{F_1} &= \frac{k}{k_e} \cdot \alpha_P = \Gamma_{P1} \\ \frac{F_{20}}{F_1} &= \frac{k}{k_e} \cdot \alpha_{20} = \Gamma_{201} \end{aligned} \quad (38)$$

Si maintenant nous considérons le système avec frottement, la distribution des masses restant identique, le rapport des forces restera lui-même identique et l'on peut écrire :

$$\frac{F_{2f}}{F_1} = \Gamma_{21} \text{ et de même dans le cas général } \frac{F_{Pf}}{F_1} = \Gamma_{P1} \quad (39)$$

Or, le cycle d'hystérésis nous définit la relation qui existe entre la force $F_{Pf} = g_P(A_P)$ et la déformée A_P .

S'il y a glissement, le point figuratif appartient à D_1 qui, d'après les équations (7) a pour équation :

$$y_{D_1} = k x_P + d_0 (K - k) \quad (40)$$

S'il n'y a pas glissement, le point figuratif se trouve sur OG qui a pour équation

$$y_{OG} = K \cdot x_P \quad (41)$$

D'où l'expression de la force F_{Pf} pour $P = 2, 3 \dots 20$

$$F_{Pf} = g_P(A_P) = k A_P + d_0 (K - k) \quad \text{si } A_P \geq d_0 \quad (42)$$

$$F_{Pf} = g_P(A_P) = K A_P \quad \text{si } A_P \leq d_0$$

et d'autre part, nous avons :

$$F_1 = k_e A_1 \quad (43)$$

$$\text{Posons } A_i = a_i d_0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots 20 \quad (44)$$

et effectuons le rapport :

$$\frac{F_{Pf}}{F_1} = \frac{k a_P + (K - k)}{k_e \cdot a_1} = \Gamma_{P_1} \quad \text{si } a_P \geq 1 \quad (45)$$

$$\frac{F_{Pf}}{F_1} = \frac{K a_P}{k_e a_1} = \Gamma_{P_1} \quad \text{si } a_P \leq 1$$

D'où la valeur a_P , amplitude relative réduite des paramètres (P), (P - 1) en fonction de a_1

$$a_P = \frac{k_e}{k} \Gamma_{P,1} a_1 + \frac{(K - k)}{k} \quad \text{si } a_P \geq 1$$

$$a_P = \frac{k_e}{K} \Gamma_{P,1} \cdot a_1 \quad \text{si } a_P \leq 1 \quad (46)$$

Nous voyons que pour un a_1 fixé a priori nous pouvons déterminer $a_P \forall P$ et, par suite, calculer la raideur équivalente K_{eP} existant entre les paramètres (P) et (P - 1)

$(K_{eP} = \frac{C_P(A_P)}{A_P})$ d'après Krylov et Bogolioubov). Nous sommes alors ramenés à calculer les fréquences propres d'un système linéaire non homogène à vingt degrés de liberté.

La méthode exposée dans l'étude du système conservatif homogène ne permet plus de faire le calcul dans le cas général, mais permet néanmoins de donner une valeur approchée ainsi que les bornes inférieures et extérieures. La résolution exacte a été effectuée sur machine I.B.M. 1130 .

Nous pouvons alors tracer les courbes squelettes des différents modes qui nous donneront la fréquence de résonance de phase et d'amplitude en fonction de l'amplitude. Pratiquement, nous nous sommes limités au calcul et au tracé des deux premiers modes.

2,9 Considération d'énergie

2,91 Expression de l'énergie fournie

Le système en chaîne est soumis à l'une de ses extrémités à une excitation déplacement comme dans le système à deux degrés de liberté, aussi, l'expression de l'énergie fournie est-elle la même, elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_{fi} = \pi k r A_{1i} \sin \varphi_1 \quad (47)$$

Et, ce qui est le cas de l'étude développée dans les paragraphes précédents, si nous nous plaçons à la résonance de phase où $\varphi_{10} = \frac{\pi}{2}$ l'expression devient :

$$\mathcal{E}_{fi} = \pi E A_1 \quad (48)$$

avec $E = k r$

2,92 Expression de l'énergie dissipée par frottement lors du glissement

Comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, l'énergie dissipée par cycle au niveau des paramètres (P) , $(P - 1)$ est égale à l'aire du cycle d'hystérésis décrit entre les paramètres (P) , $(P - 1)$.

D'après le premier chapitre et en fonction des notations utilisées, l'énergie dissipée par cycle au niveau (P) , $(P-1)$ s'écrit :

$$D_{Pi} = 4 (A_{Pi} - d_0)(K - k) d_0 \quad (49)$$

et ceci est valable quel que soit « P » si $A_P \geq d_0$.

L'énergie totale dissipée dans la chaîne sera la somme des énergies partielles d'où l'expression de l'énergie dissipée globale :

$$D_{Gi} = 4 (K - k) d_o \sum_{P=2}^{20} (A_{Pi} - d_o) \quad (50)$$

Pour tout $(A_P - d_o) \geq 0$

$$\text{Or } A_{Pi} = a_{Pi} d_o$$

$$D_{Gi} = 4 (K - k) d_o^2 \sum_{P=2}^{20} (a_{Pi} - 1) \quad (51)$$

Pour tout P tel que $a_P - 1 \geq 0$

2,93 Bilan énergétique

2,931 Equation

En dehors des frotteurs, le système est purement élastique, aussi, peut-on dire en première approximation que l'énergie fournie, une fois en régime stable établi, est entièrement absorbée par les frotteurs. Ceci est valable quelle que soit la fréquence, et, en particulier, nous pouvons écrire cette égalité à la résonance de phase et d'amplitude:

$$\mathcal{E}_{fi} = D_{Gi} \quad (52)$$

ou d'une manière explicite d'après les équations (48) et (51) :

$$\pi E A_{1i} = 4 (K - k) d_o^2 \sum_{P=2}^{20} (a_{Pi} - 1) \quad (53)$$

Pour tout P tel que $(a_{Pi} - 1) \geq 0$

Posons

$$A_{1i} = a_{1i} d_o \quad \text{avec} \quad d_o = \frac{\tau}{K}$$

τ étant la force de frottement lorsqu'il y a glissement et K la raideur interparamètres lorsqu'il n'y a pas glissement. L'équation (53) s'écrit alors :

$$\pi E a_{1i} = 4 (K - k) \frac{\tau}{K} \cdot \sum_{P=2}^{20} (a_{Pi} - 1) \quad (54)$$

Faisons apparaitre le rapport $R_i = \frac{E}{\tau}$ il vient :

$$R_i = \frac{E}{\tau} = \frac{4}{\pi} \frac{K - k}{K} \frac{1}{a_{1i}} \cdot \sum_{P=2}^{20} (a_{Pi} - 1) \quad (55)$$

si P tel que : $(a_{Pi} - 1) \geq 0$

Or, si nous revenons à l'équation (46) nous avons vu que pour un a_1 donné, il y correspond un a_p pour $P = 2, 3 \dots, 20$ et donc, en définitive, pour un a_1 donné, il y correspond d'une manière unique une $\sum_{P=2}^{20} (a_p - 1)$ et par suite, une valeur bien déterminée de l'expression (55).

Aussi, cette équation nous montre-t-elle que pour un rapport « force d'excitation » sur « force de frottement donné » il y correspond d'une manière unique un a_1 et, par suite, un a_p quel que soit P .

De plus, dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la fréquence de résonance était fonction de l'amplitude et donc nous voyons maintenant que la fréquence de résonance du système dépend d'une manière unique du rapport $\frac{E}{\tau} = R_i$.

$$2,932 \text{ Courbe } R_i = \frac{E}{\tau} = f(A_{1i}) \cdot \text{graphes}$$

Supposons a_1 suffisamment grand pour que, d'après l'équation (46), tous les $a_p \geq 1$ à ce moment là nous pouvons, dans l'équation (55), remplacer a_p par sa valeur en fonction de a_1 d'après (46) il vient alors :

$$R_i = \frac{E}{\tau} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(K - k)}{K} \cdot \frac{1}{a_{1i}} \cdot \sum_{P=2}^{20} \left[\frac{k_e}{k} \Gamma_{P1} a_{1i} - \frac{K - k}{k} - 1 \right]$$

ou encore :

$$R_i = \frac{E}{\tau} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K - k}{K} \sum_{P=2}^{20} \left[\frac{k_e}{k} \Gamma_{P1} - \frac{K}{k a_{1i}} \right]$$

On voit que si $a_1 \longrightarrow \infty$ R_i tend vers une limite finie

$$R_i = \frac{E}{\tau} \longrightarrow R_{i \text{ lim}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K - k}{K} \cdot \sum \frac{k_e}{k} \cdot \Gamma_{P1i}$$

$a_1 \longrightarrow \infty$

Cela veut dire que pratiquement si le rapport $R_i = \frac{E}{\tau} \geq R_{i \text{ limite}}$, les amplitudes seront infinies et aux fréquences propres du système conservatif (voir fréquence en fonction de amplitude).

Nous avons tracé les graphes de la fonction (46) pour les trois premiers modes propres du système.

2,933 Interprétation théorique de ces graphes

Ces graphes nous montrent que pour un rapport R_{ii} fixé à l'avance, il en découle

d'une manière unique une amplitude a_{1i} et donc, d'après l'équation (46) une amplitude a_{Pi} . Or, d'après les courbes squelettes, nous connaissons les pulsations propres en fonction de l'amplitude et donc, puisque l'amplitude est déterminée uniquement par le rapport R_{1i} , nous avons les pulsations propres en fonction de R_{1i} . Aussi, chaque point des courbes squelettes représente-t-il un rapport R_{1i} bien déterminé, et, par simple connaissance de ce rapport, on peut, à l'aide des courbes squelettes, donner une idée de la courbe de réponse tout en situant en amplitude et en fréquence le point de résonance de phase et d'amplitude.

D'autre part, on peut remarquer que $R_1 \text{ limite} < R_2 \text{ limite} < R_3 \text{ limite}$, ce qui veut dire que le troisième mode est amorti pour un frottement bien plus faible que le deuxième mode lui-même amorti par un frottement bien plus faible que le fondamental, ceci pour une excitation donnée E_0 . Pratiquement, quand R_i diminue, il y a « disparition » des modes supérieurs.

2,10 Variation de $A_{i,j}$ en fonction de R_i

Nous avons posé $a_P = \frac{A_P}{d_0}$ $P = 1, 2, \dots, 20$.

D'où $a_1 = \frac{A_1}{d_0}$. Or, d'après les courbes énergétiques précédentes, nous avons :

$$a_{1i} = f\left(\frac{E}{\tau}\right) = f(R_i)$$

D'où A_1 et par l'intermédiaire de (46) $A_P = a_P d_0$

D'autre part, $R_i = \frac{E}{\tau}$ et donc étudier $A_{ij} = \Gamma(R_i)$ revient à étudier $A_{ij} = \Gamma\left(\frac{E_v}{\tau_0}\right)$

(R variant dans ce cas avec E variable et $\tau = \tau_0 = \text{constant}$) or $A_{ij} = \Gamma\left(\frac{E_0}{\tau_v}\right)$

(R variant avec τ variable et $E = E_0 = \text{Cte}$).

2,101 Etude de $A_{ij} = \Gamma\left(\frac{E_v}{\tau_0}\right)$

Pour les mêmes raisons que dans le premier chapitre, une étude analytique n'est pas possible. Aussi avons-nous calculé une courbe pour une valeur particulière de τ_0 . L'allure sera la même quelle que soit la valeur initiale de τ_0 .

Cependant, d'une manière qualitative, on peut dire, d'après l'équation (55), que la variation est monotone et que $A_{i,j}$ croît avec E_v et devient infini pour $E_{v \text{ lim}}$ tel que

$$\frac{E_{v \text{ lim}}}{\tau_0} = R_{i \text{ lim}}$$

D'autre part, à l'aide des graphes, on peut noter que lorsque E_v croît, le fondamental « sort » très bien alors que le second mode, et encore plus le troisième mode, sont très atténués et, de plus, étant donné le déplacement important en fréquence des modes supérieurs, on peut dire que dans la zone primitive de ces modes, ils sont totalement disparus.

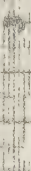
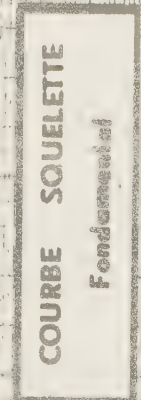
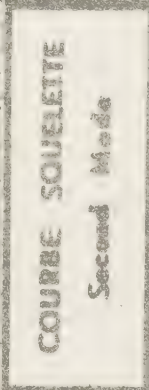
$$2,102 \text{ Etude de } A_{ij} = \Gamma \left(\frac{E_0}{\tau_v} \right)$$

Cette fois nous nous fixons une valeur initiale de l'excitation E_0 et τ_v sera la variable. Là aussi, nous avons effectué une résolution numérique.

Nous pouvons a priori donner la variation de la courbe, en effet, si $\tau_v \Rightarrow T_v \lim = \frac{E_0}{R_i \lim} \Rightarrow A_{ij} \Rightarrow +\infty$, de même si $\tau_v \Rightarrow \infty \Rightarrow A_{ij} \Rightarrow +\infty$ aussi la courbe ne peut être que décroissante entre ces deux extrêmes et avoir une allure « parabolique ».

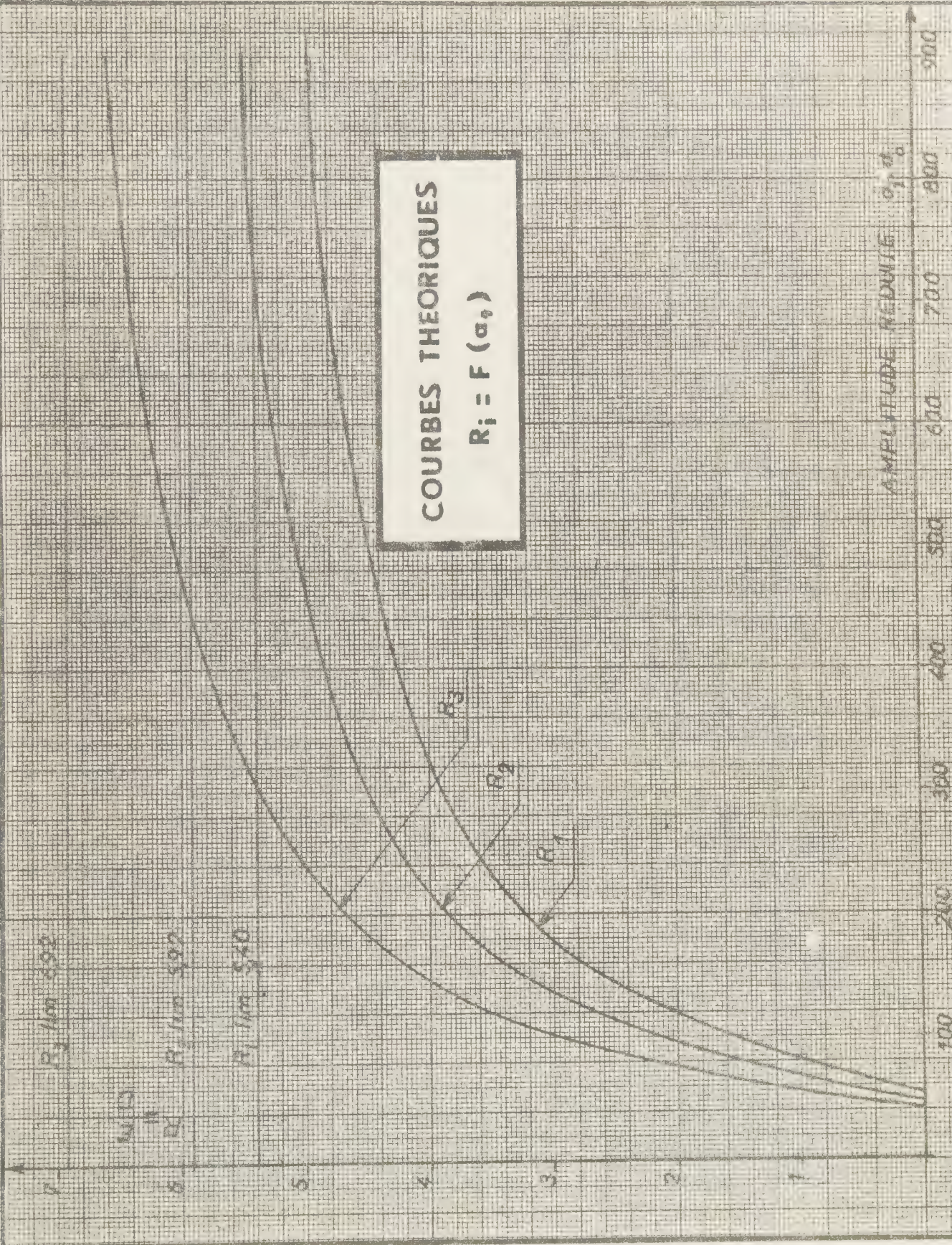
Interprétation des graphes

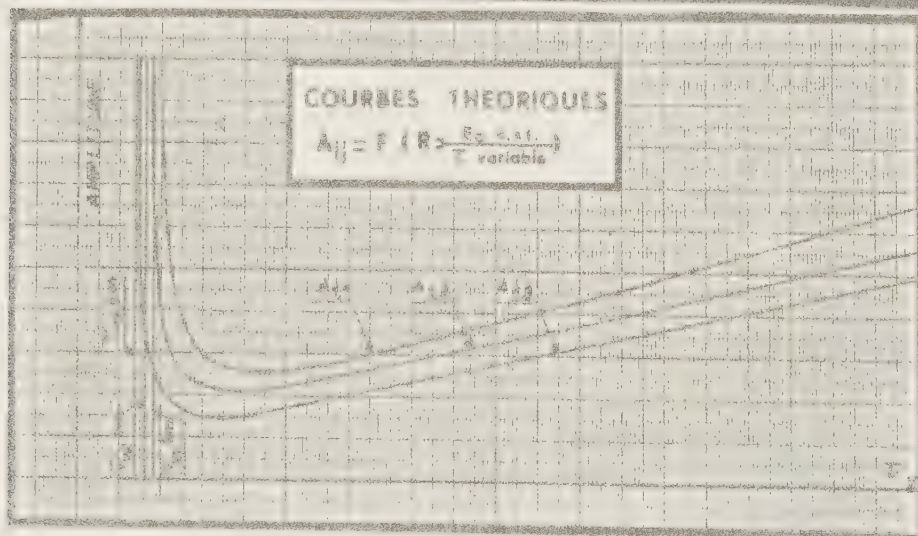
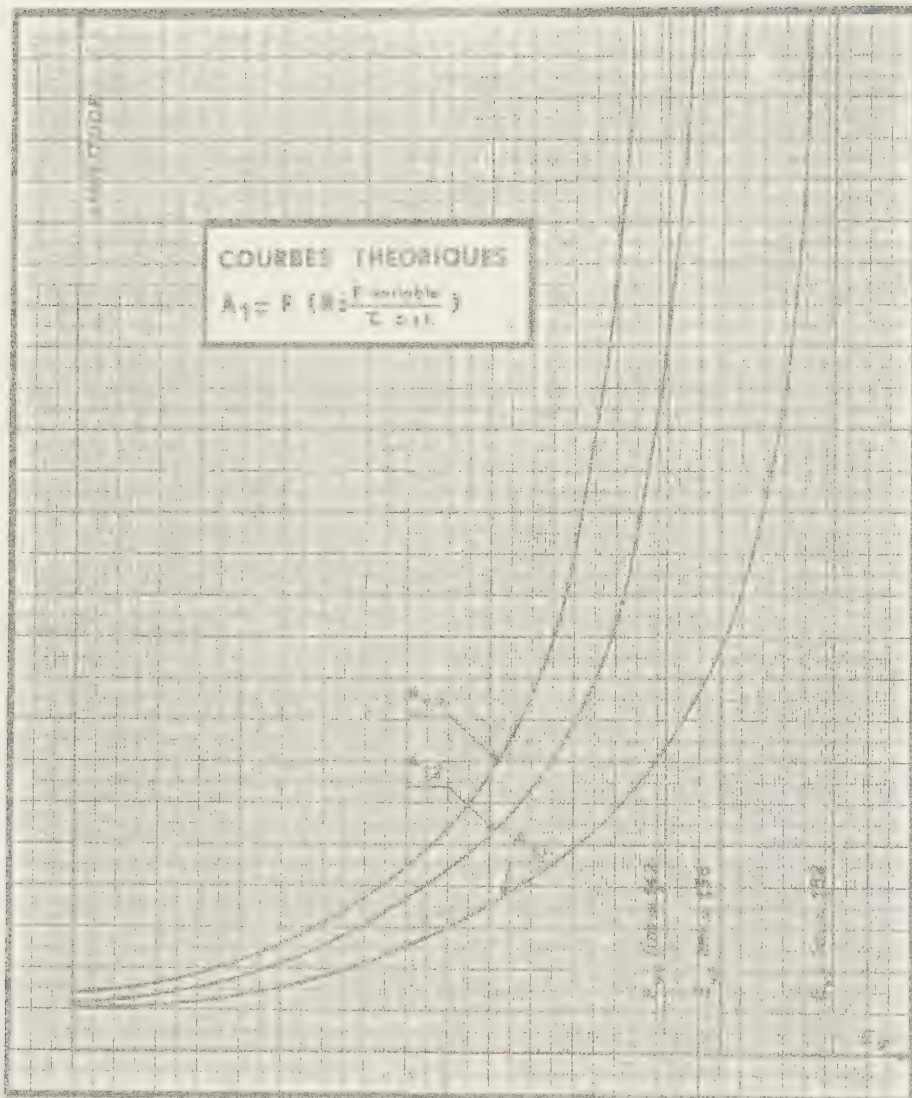
L'interprétation de ces graphes est strictement la même que dans le cas du premier chapitre, nous constatons tout d'abord une décroissance brutale et quasi-linéaire de l'amplitude avec un frottement croissant, puis, les amplitudes passent par un minimum et lentement elles croissent avec le frottement. Là aussi, théoriquement, il y a conservation des modes, mais du fait du déplacement très important en fréquence il y a pratiquement disparition des modes supérieurs de la zone primitive.



COURBES THEORIQUES

$$R_i = F(\sigma_r)$$





B - ETUDE EXPERIMENTALE

1 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1.1 Dispositif mécanique

Le système en chaîne à vingt degrés de liberté couplés est constitué par un ensemble rotatif de 20 disques fixés très énergiquement sur un fil de torsion. La rotation a été choisie, contre un système en translation, pour les mêmes raisons que pour le système à deux degrés du premier chapitre. Le fil de torsion joue le double rôle d'axe de rotation de l'ensemble et de raideur interdisque k ; il est constitué par un acier au silicium à haute limite élastique, et, par suite, ayant une caractéristique « couple appliqué - rotation » linéaire dans un très vaste domaine; il constitue également la raideur d'entrée k_e et possède un diamètre de 3 mm.

Les disques sont en AU 4G de 280 mm de diamètre et de 1,6 mm d'épaisseur et sont distants sur le fil de 80 mm. Ils sont rendus solidaires du fil par l'intermédiaire d'une pièce secondaire et de trois vis de pression ayant l'extrémité trempée.

Le dispositif de frottement interdisque est en tout point identique à celui du système à deux degrés, seules, les caractéristiques numériques sont différentes. Il en est de même de l'excitation harmonique qui est la même que dans le premier chapitre.

La chaîne est montée verticalement et le fil de torsion est prolongé par un long fil de torsion de diamètre 2 mm seulement, et ayant, de ce fait, une raideur qui est seulement 2 % de la raideur interdisque; ce fil secondaire constitue la raideur de sortie qui peut être considérée comme nulle et donc l'extrémité de la chaîne est « libre ».

L'ensemble des deux fils de torsion est tendu entre deux points fixes d'un support. Par ce montage, le système n'est soumis à aucun frottement extérieur, car, en effet, la sortie est purement élastique et l'entrée est elle-même purement élastique, étant donné que l'excitation est en prise directe sur la butée.

1,2 Mesures

1,21 - Mesures des amplitudes

La mesure des amplitudes a été effectuée dans les mêmes conditions que dans le premier chapitre, à savoir que chaque disque possède un index qui se déplace devant un secteur gradué. La fréquence du fondamental étant basse, de l'ordre de 0,5 Hz, la précision des mesures est très bonne et l'erreur absolue est de l'ordre de $\pm 0,25$ degré, soit une erreur relative qui reste toujours inférieure à 2 % .

Nous avons également fait quelques mesures photographiques déclenchées en synchronisme par l'intermédiaire d'un relais; soit avec l'excitation, soit avec l'amplitude maxi de A_1 , ce qui nous a permis de faire des relevés des déformées instantanées et du déphasage « excitation-chaîne » à la résonance d'amplitude.

1,22 Mesure des fréquences

Nous nous sommes attachés à effectuer les mesures de fréquence avec le plus de précision possible et le dispositif à top capacitif et compteur numérique est le même que celui du premier chapitre. En général, les périodes sont données avec au moins deux chiffres significatifs exacts, d'où une erreur relative toujours inférieure à 0,5 %

$$\frac{\Delta f}{f} \leq 0,5 \%$$

2 - ETUDE STATIQUE

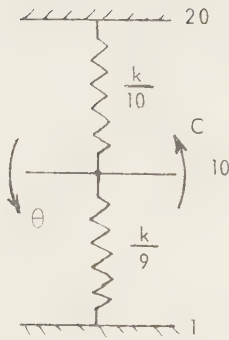
2,1 Détermination des raideurs

Le système en chaîne est caractérisé par une raideur inter-disque k_P supposée constante quel que soit P , étant donné que tous les disques sont équidistants sur le fil de torsion, nous poserons $k_P = k$; il est également caractérisé par une raideur d'entrée k_e et une raideur de sortie k_s

2,11 Raideur inter-disque « k »

Le schéma de l'essai est le suivant :

Le premier et le vingtième disques ont été verrouillés à zéro, puis nous avons appliqué sur le dixième un couple « $\mathcal{C}$ » croissant, et pour chaque valeur du couple, nous avons relevé



la rotation correspondante du dixième disque. D'où la raideur équivalente K_1 . D'après le montage, nous avons deux ressorts en série de valeur respective $\frac{k}{10}$ et $\frac{k}{9}$ et dont leurs raideurs s'ajoutent

$$\text{D'où } K_1 = \frac{k}{10} + \frac{k}{9} = \frac{19k}{90} \quad k = \frac{90 K_1}{19}$$

Tableau de mesures

Couple N m	θ degrés	θ radians
0,298	11	0,192
0,486	18	0,314
0,595	22	0,384
0,675	25	0,436
1,001	37	0,646

Nous avons ainsi trouvé $K_1 = 1,155 \text{ N m rd}$

D'où la valeur moyenne de la raideur inter disque k :

$$k = 5,47 \text{ N m rd}$$

■ Erreur sur k :

$$k = \frac{90 K_1}{19} \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta K_1}{K_1}$$

$$\text{Or } K_1 = \frac{P L}{\theta}$$

$$\text{et } \frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \theta}{\theta} \quad \text{Avec } \Delta P \neq 0$$

$$\text{D'où } \left| \frac{\Delta K_1}{K_1} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta \theta}{\theta} \right|$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{140}$$

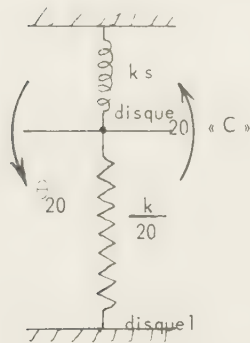
$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{1,25}{100}$$

$$\text{soit } \left| \frac{\Delta K_1}{K_1} \right| = \left| \frac{\Delta k}{k} \right| = 1,97 \%$$

$$\text{D'où } |\Delta k| = 0,108$$

$$k = 5.47 \pm 0,11 \text{ N m rd}$$

2,12 Raideur de sortie « k_s »



Le schéma de l'essai effectué est le suivant :

ici seul le premier disque est verrouillé ainsi que l'extrémité d'ancrage du ressort de sortie. De la même manière que précédemment, nous avons appliqué un couple « C » croissant sur le vingtième disque et relevé chaque fois la rotation correspondante θ_{20} . D'où la raideur équivalente K_2 . Comme précédemment, nous avons deux ressorts en série d'où les relations :

$$K_2 = \frac{k}{20} + k_s \quad \text{soit} \quad k_s = K_2 - \frac{k}{20}$$

Tableau de mesures

Couple N.m	0,0512	0,102	0,134	0,194	0,235	0,261
θ_{20} degrés	7,5 ⁺	15,25	20 ⁺	29	35 ⁺	39
θ_{20} rd	0,134	0,266	0,352	0,507	0,614	0,684

Nous avons ainsi trouvé $K_2 = 0,382 \text{ N m rd}$, d'où la valeur de la raideur de sortie

k_s

$$k_s = 0,108 \text{ N m rd}$$

■ Erreur sur k_s :

$$k_s = K_2 - \frac{k}{20} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\Delta k_s}{k_s} = \frac{\Delta K_2}{\left(K_2 - \frac{k}{20}\right)} + \frac{\Delta \left(\frac{k}{20}\right)}{\left(K_2 - \frac{k}{20}\right)}$$

$$\left| \frac{\Delta k_s}{k_s} \right| = \frac{|\Delta K_2| + \left| \Delta \frac{k}{20} \right|}{\left| K_2 - \frac{k}{20} \right|}$$

Par expérience $\frac{\Delta K_2}{K_2} = \frac{\Delta K_1}{K_1} = 1,97 \%$

D'où $\Delta K_2 = 0,0075$

$\Delta \left(\frac{k}{20} \right) = 0,055$ soit $\left| \frac{\Delta k_s}{k_s} \right| = 5,8 \%$

D'où $|\Delta k_s| = 0,0062 \text{ N m r d}$

$k_s = 0,108 \pm 0,006 \text{ N m r d}$

2,13 Raideur d'entrée

Après verrouillage du premier disque, nous avons fait une mesure directe de la raideur d'entrée. Etant donné la présence d'une butée à bille, nous avons obtenu de grandes divergences dans les résultats ($\pm 25 \%$). Finalement, nous avons adopté la valeur moyenne suivante :

$k_e = 2,10 \pm 0,5 \text{ N m / r d}$

2,2 - Calcul de l'inertie de chaque disque

Un degré de liberté est constitué par un disque en AU 4 G de 280 mm de diamètre et de 1,6 mm d'épaisseur, et la pièce centrale de fixation sur l'axe élastique.

$I = I_{\text{disque}} + I_{\text{pièce centrale}}$

$I_{\text{disque}} = \rho \frac{\pi R^4}{2} e$ avec $\rho_d = 2800 \text{ Kg / m}^3$

$R_d = 0,14 \text{ m}$

$I_{\text{disque}} = 26,05 \cdot 10^{-4} \text{ Kg m}^2$

$e_d = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

L'inertie de la pièce centrale est faible et tout calcul fait, on trouve :

$I_{P \text{ centrale}} = 0,328 \cdot 10^{-4}$

$I_{\text{Total}} = 26,38 \cdot 10^{-4} \text{ Kg m}^2$

■ Erreur sur I :

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| = 4 \left| \frac{\Delta R}{R} \right| + \left| \frac{\Delta e}{e} \right|$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0,1}{280} \quad \left| \frac{\Delta I}{I} \right| \neq 3,30 \% \text{ soit } |\Delta I| = 0,85 \cdot 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$$

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,05}{1,6}$$

$$I = 26,38 \pm 0,85 \cdot 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$$

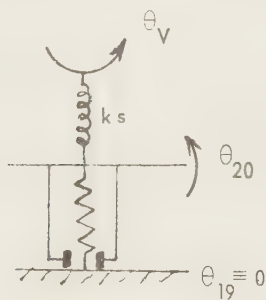
2,3 Tracé des cycles d'hystérésis

Nous avons ici tracé deux types de cycles : des cycles locaux et des cycles globaux.

2,31 Cycle « local »

Il s'agit du cycle qui existe entre deux paramètres consécutifs de la chaîne, par exemple entre les paramètres (P) et (P - 1). Etant donné la constitution homogène de la chaîne, tous ces cycles « locaux » sont identiques, quel que soit (P).

Le mode opératoire pour le relevé d'un cycle est le même que celui du premier chapitre. Ici, pour des raisons techniques d'application du couple, nous avons relevé les cycles locaux entre le 19^{ème} et le 20^{ème} disque pour différentes valeurs du frottement.



Pour ce faire, nous avons verrouillé le 19^{ème} disque, puis, par l'intermédiaire de la raideur de sortie, nous avons appliqué un couple cyclique, ceci en donnant une rotation θ_v à l'extrémité du fil de sortie, il en résulte alors une rotation θ_{20} du 20^{ème} disque. Le couple appliqué s'écrit alors :

$$C_a = k_s(\theta_v - \theta_{20})$$

D'où le tracé du cycle (voir graphes).

2,32 Cycle « global »

Ici, il s'agit de tracer le cycle total qui existe entre le premier et le 20^{ème} disque. Le système étant homogène lorsque le couple appliqué est égal au couple de frottement, il y a début de glissement au niveau de tous les frotteurs à la fois et le cycle obtenu est bi-linéaire. Pour effec-

tuer ce relevé, nous avons verrouillé le premier disque, puis, par l'intermédiaire de la raideur de sortie k_s , appliqué un couple cyclique sur le 20^{ème} disque et chaque fois nous avons relevé θ_V et θ_2 (Nous avons également relevé la rotation de θ_P quel que soit P pour vérifier la régularité et le synchronisme du glissement). Comme précédemment, le couple appliqué s'écrit : $C_a = k_s (\theta_V - \theta_2)$. D'où le tracé du cycle (voir graphes).

2,4 Raideur lorsqu'il n'y a pas glissement

La raideur inter-disque, lorsqu'il n'y a pas glissement, a été déterminée à partir des cycles globaux en tenant compte là aussi que nous avons par constitution un système homogène, et donc que la raideur inter-disque K est la même tout au long de la chaîne.

A partir des différents cycles globaux, nous avons relevé que le rapport des pentes était en moyenne de 20 mais avec une divergence des résultats assez importante de l'ordre de 20 %. En définitive, nous obtenons :

$$\frac{K}{k} = 20 \quad \text{avec} \quad k = 5,47 \text{ N.m.rd.}$$

$$\text{D'où} \quad K = 109,4 \text{ N.m.rd.}$$

■ Erreur commise sur « K »

$$K = a \cdot k \text{ d'où } \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta k}{k}$$

$$\frac{\Delta a}{a} \neq 20 \%$$

$$\frac{\Delta k}{k} = 2 \%$$

$$\text{soit } \left| \frac{\Delta K}{K} \right| \neq 22 \% \text{ et } |\Delta K| = 24,1 \text{ N.m.rd}$$

$$K = 109,4 \pm 24,1 \text{ N.m.rd.}$$

2,5 Coefficient de frottement

A partir des cycles, nous avons pu déterminer le couple de frottement pour chaque réglage de la force normale F_N s'exerçant sur les patins. Or, le couple de frottement s'écrit :

$$C_f = F_N \cdot f \cdot d$$

f : coefficient de frottement

$$\text{soit} \quad f = \frac{C_f}{F_N \cdot d}$$

d : diamètre du cylindre de frottement

$$d = 25 \text{ mm}$$

F_N : force normale sur le patin qui nous est donnée par la raideur de la contre lame qui a elle-même été déterminée par un essai statique, nous avons trouvé $F_N = 7,8 \text{ N. mm}$ ou encore $F_N = 7,8 \text{ y. N}$

y étant la flèche de la contre lame en mm.

■ Erreur commise sur le coefficient de frottement

D'après l'expression précédente, nous avons :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta C_f}{C_f} - \frac{\Delta F_N}{F_N} \quad \text{-(négligeable)}$$

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{\Delta C_f}{C_f} \right| + \left| \frac{\Delta F_N}{F_N} \right|$$

Le couple de frottement C_f est connu avec la même précision que celle de K , c'est-à-dire, 22 % près. Quant à la précision sur F_N , elle est variable en valeur relative avec y puisqu'en effet, nous avons :

$$\frac{\Delta F_N}{F_N} = \frac{\Delta y}{y} \quad \text{avec } \Delta y = 0,125 \text{ mm} = \text{Cste}$$

Tous calculs effectués, les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant:

$C_f \cdot N \cdot m$	0,264	$\pm 0,058$	0,210	$\pm 0,046$	0,147	$\pm 0,032$	0,117	$\pm 0,026$	0,0799	$\pm 0,017$	0,0394	$\pm 0,0086$
$F_N \cdot N$	19,5	$\pm 0,975$	15,6	$\pm 0,975$	11,7	$\pm 0,975$	9,75	$\pm 0,975$	7,8	$\pm 0,975$	5,85	$\pm 0,975$
f	0,541	$\pm 0,146$	0,539	$\pm 0,152$	0,502	$\pm 0,152$	0,480	$\pm 0,153$	0,410	$\pm 0,142$	0,27	$\pm 0,104$

♦ REMARQUE SUR CES RESULTATS - Nous constatons que le coefficient de frottement varie énormément et, en particulier, diminue avec la force normale. Nous pouvons donner quelques justifications à ceci car, en effet, pour les forces normales élevées, nous avons observé des traces de grippage sur les surfaces en contact ce qui modifie considérablement le coefficient de frottement.

D'autre part, pour les frottements importants, il se produit le même phénomène de torsion des lamelles et contre-lamelles expliqué au premier chapitre, ce qui a pour résultat d'augmenter la force normale par rapport à sa valeur d'origine, ce qui se traduit par une sur-estimation du coefficient de frottement. Là aussi, le phénomène d'arc-boutement se manifeste dans les mêmes conditions.

3 - ETUDE DYNAMIQUE

Nous avons soumis notre système en chaîne à une excitation forcée, harmonique, du type déplacement; cette excitation est réglable en amplitude et en fréquence. De plus, le frottement inter-disque étant réglable également, nous avons successivement fait varier ces deux paramètres, mais auparavant nous avons effectué un balayage en fréquence du système conservatif afin de déterminer les 10 premiers modes propres.

3,1 Etude du système conservatif

Avant de montrer le système de frottement, nous avons réglé une excitation E_0 , puis nous avons effectué un balayage en fréquence. Les résultats expérimentaux sont consignés dans le tableau suivant où figurent également les fréquences théoriques calculées ainsi que l'erreur relative entre les fréquences réelles et les fréquences calculées.

N° du Mode	Fréquence théorique (H_2)	Fréquence expérimentale (H_2)	Ecart brut %
1	$0,515 \pm 0,023$	$0,547 \pm 0,0027$	+ 5,85
2	$1,560 \pm 0,08$	$1,56 \pm 0,008$	0
3	$2,612 \pm 0,12$	$2,56 \pm 0,013$	- 0,2
4	$3,673 \pm 0,16$	$3,53 \pm 0,018$	- 0,4
5	$4,719 \pm 0,21$	$4,63 \pm 0,023$	- 1,9
6	$5,745 \pm 0,26$	$5,72 \pm 0,029$	- 0,4
7	$6,728 \pm 0,30$	$6,67 \pm 0,038$	- 0,9
8	$7,817 \pm 0,35$	$7,80 \pm 0,039$	- 0,2
9	$8,658 \pm 0,39$	$8,73 \pm 0,044$	+ 0,8
10	$9,516 \pm 0,43$	$9,58 \pm 0,048$	+ 0,7

Nous pouvons observer que c'est pour le fondamental que l'erreur est la plus grande, cela vient du fait de la grande imprécision avec laquelle est connue la raideur d'entrée, étant donné que son influence est maximum pour le fondamental.

3,2 Etude à frottement constant

Balayage en excitation

Nous avons fixé un frottement initial τ_{01} et nous avons tracé pour ce frottement les courbes de réponses pour des valeurs croissantes de l'excitation. Nous avons recommencé la même opération pour un nouveau réglage primitif du frottement τ_{0i} (voir graphes).

Nous pouvons constater, à l'examen des graphes, que, exactement dans les mêmes conditions que pour le premier chapitre, les résonances sont du type « MOU » c'est-à-dire que la fréquence de résonance de phase et d'amplitude se déplace vers les basses fréquences quand l'amplitude d'excitation, donc, du système, augmente.

3,3 Etude à excitation constante

Balayage en frottement

C'est l'étude inverse de la précédente. Nous avons fixé une excitation E_{01} et nous avons tracé pour cette excitation initiale les courbes de réponses pour des valeurs croissantes de la force de frottement, et ceci pour différentes valeurs primitives E_{0i} (voir graphes).

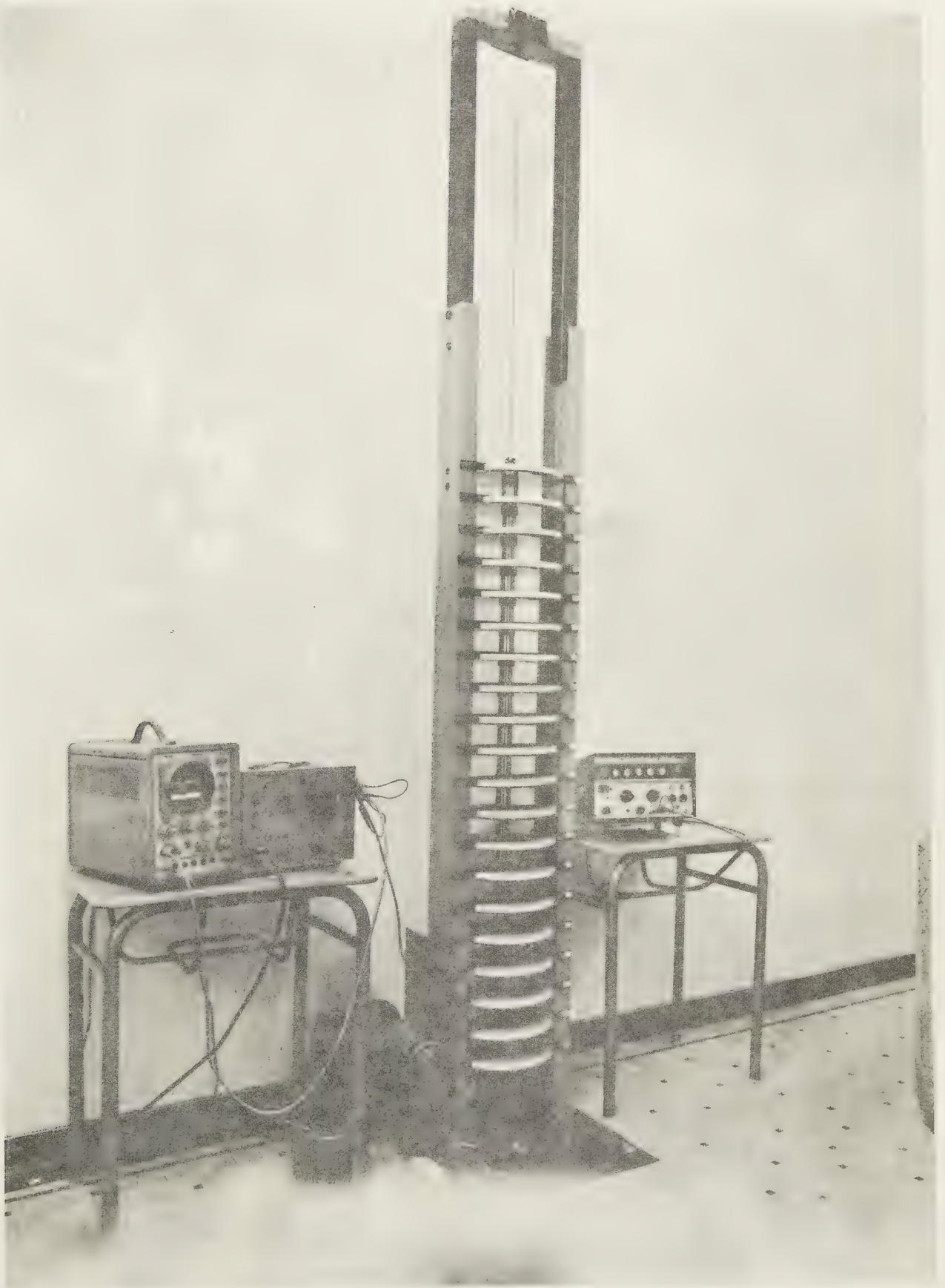
L'examen des graphes nous montre ici que pour un frottement « naissant » il y a une diminution très rapide de l'amplitude d'une manière quasi linéaire avec τ puis, lorsque τ continue de croître régulièrement, la décroissance des amplitudes est de plus en plus faible et l'on arrive alors dans une zone assez « large » où les amplitudes du système sont pratiquement constantes; enfin, une dernière zone où les amplitudes augmentent régulièrement et là aussi d'une manière quasi linéaire avec la force de frottement τ ; par analogie avec le paragraphe précédent, nous pouvons dire que, vis-à-vis du frottement, le système est d'abord du type « mou » (pour un frottement naissant), puis du type « dur ».

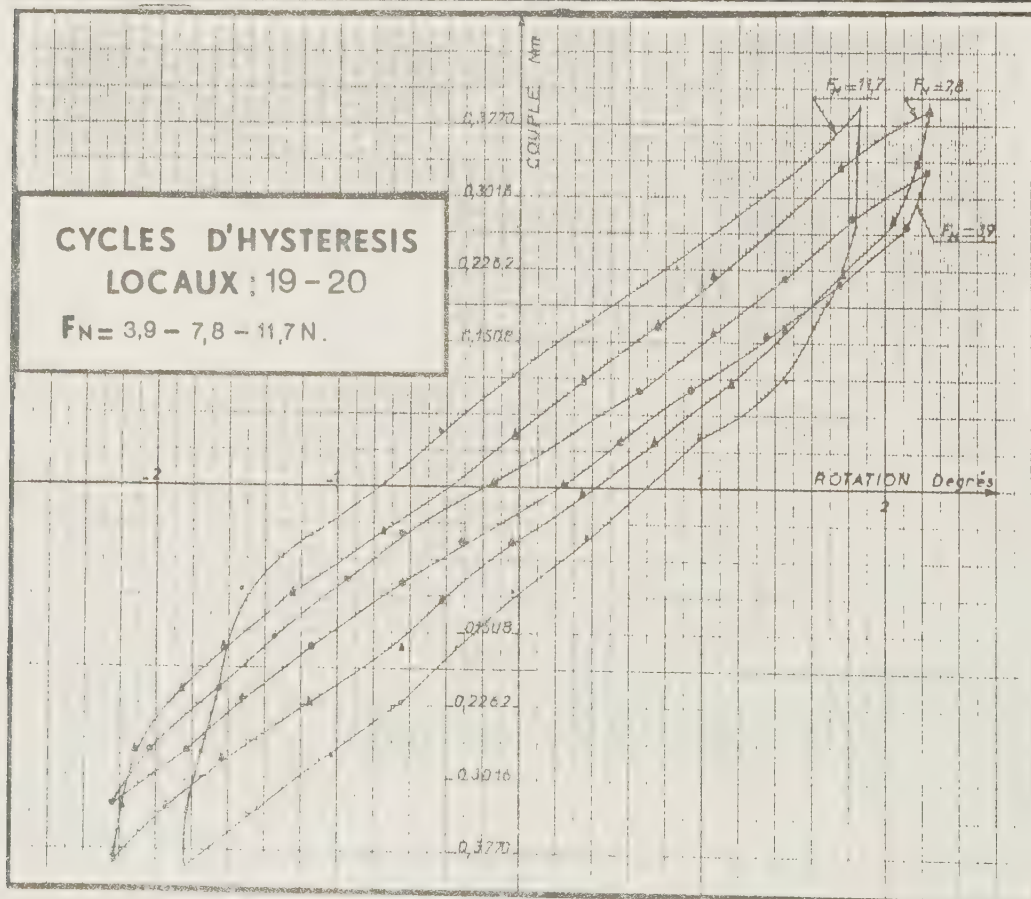
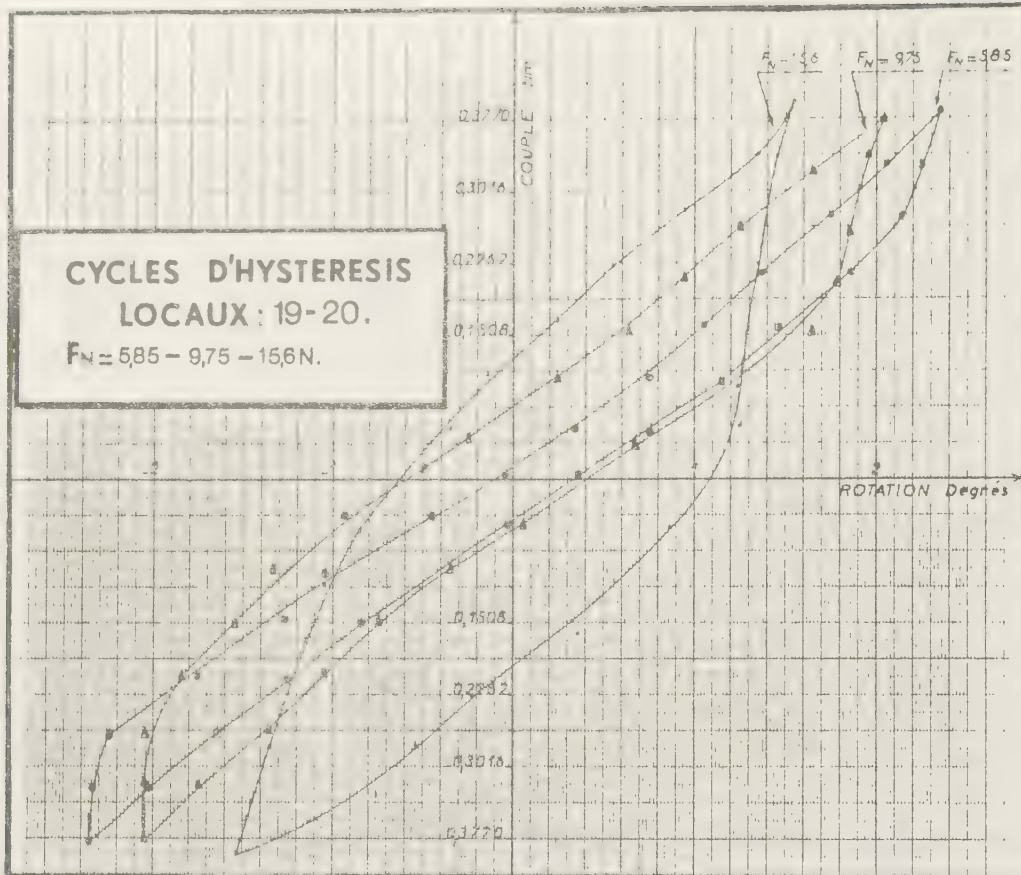
CONCLUSION DU DEUXIEME CHAPITRE

Le système en chaîne à hystérésis interne et à vingt degrés de liberté couplés, a été étudié d'une manière théorique aussi complètement que possible, en particulier autour de la résonance de phase et d'amplitude, en fonction des différents paramètres. La vérification expérimentale des conclusions avancées par l'étude théorique a couvert tout le plan des paramètres et a confirmé en tous points les prévisions théoriques, et ceci malgré de grandes difficultés pour le réglage, d'une manière homogène, du frottement et pour la mesure des amplitudes de chaque paramètre.

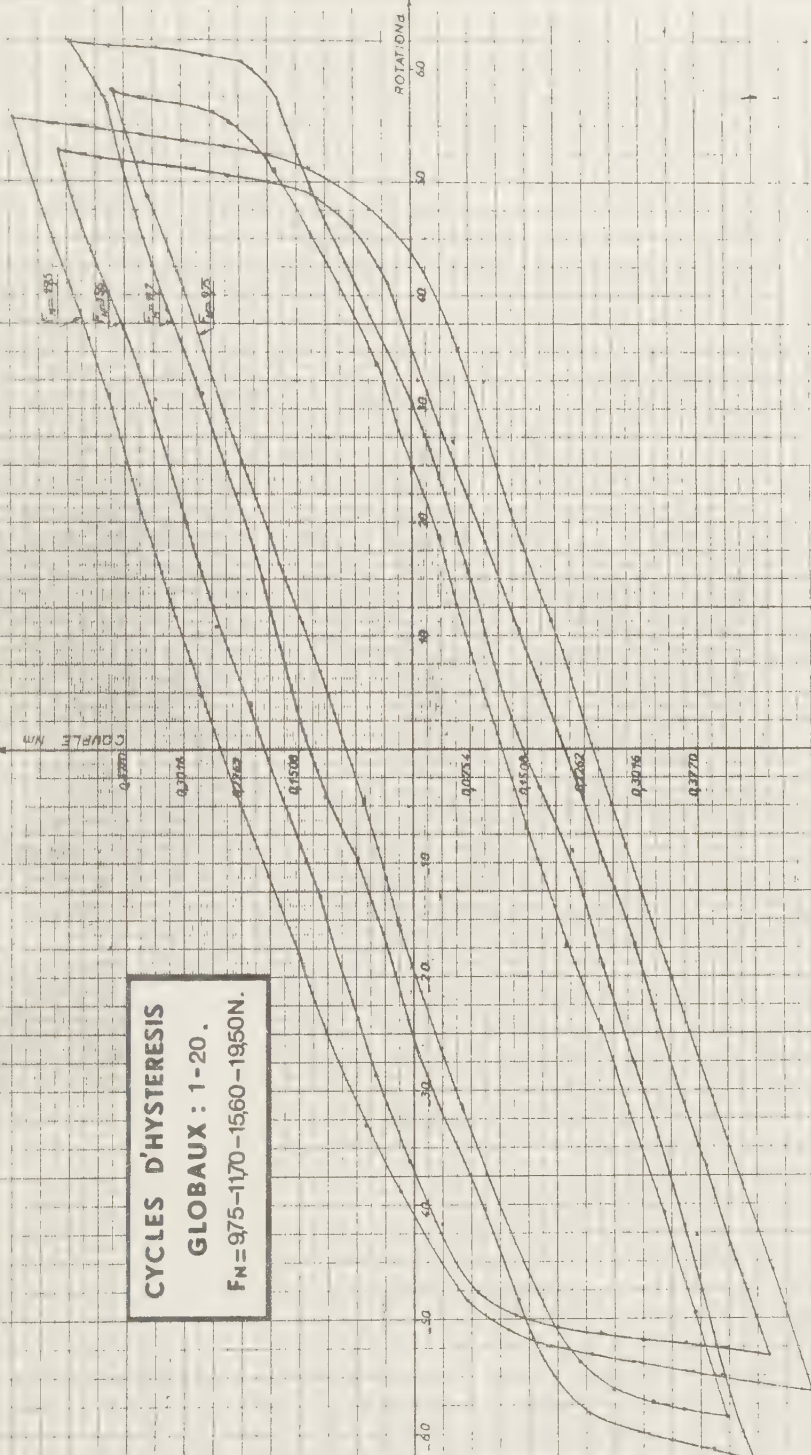
De toute l'étude précédente, il ressort que nous pouvons reconduire exactement toutes les conclusions du premier chapitre, à savoir :

- que pour une force de frottement donnée, le système possède une résonance du type « mou »
- que pour une excitation fixée, les fréquences de résonance de phase se déplacent vers les hautes fréquences quand le frottement augmente alors que, pendant ce temps, l'amplitude décroît, passe par un minimum, puis croît,
- qu'en définitive, la fréquence de résonance n'est fonction que du rapport $R = \frac{E}{\tau}$
- que la réponse dynamique peut être prévue à partir d'un simple essai statique et par la connaissance du rapport R .

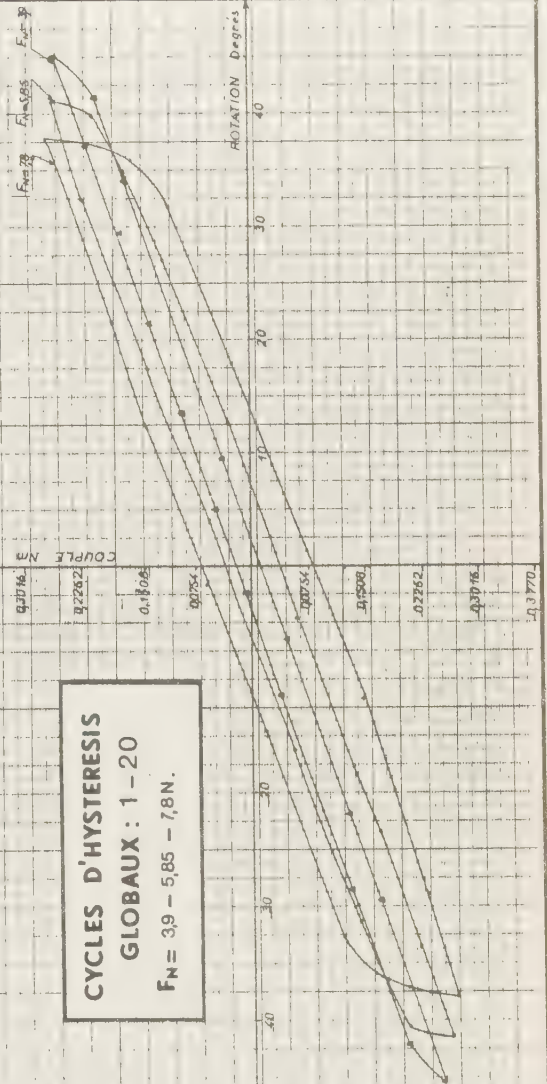


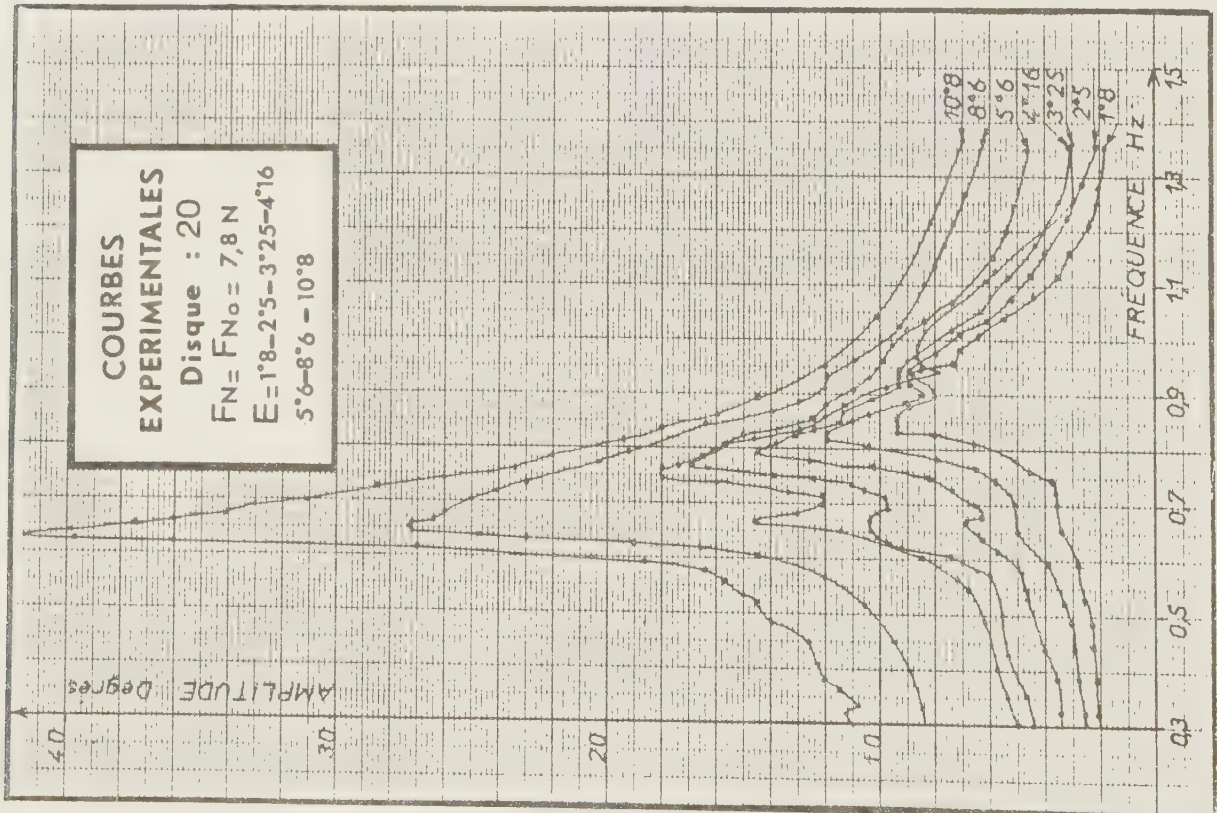
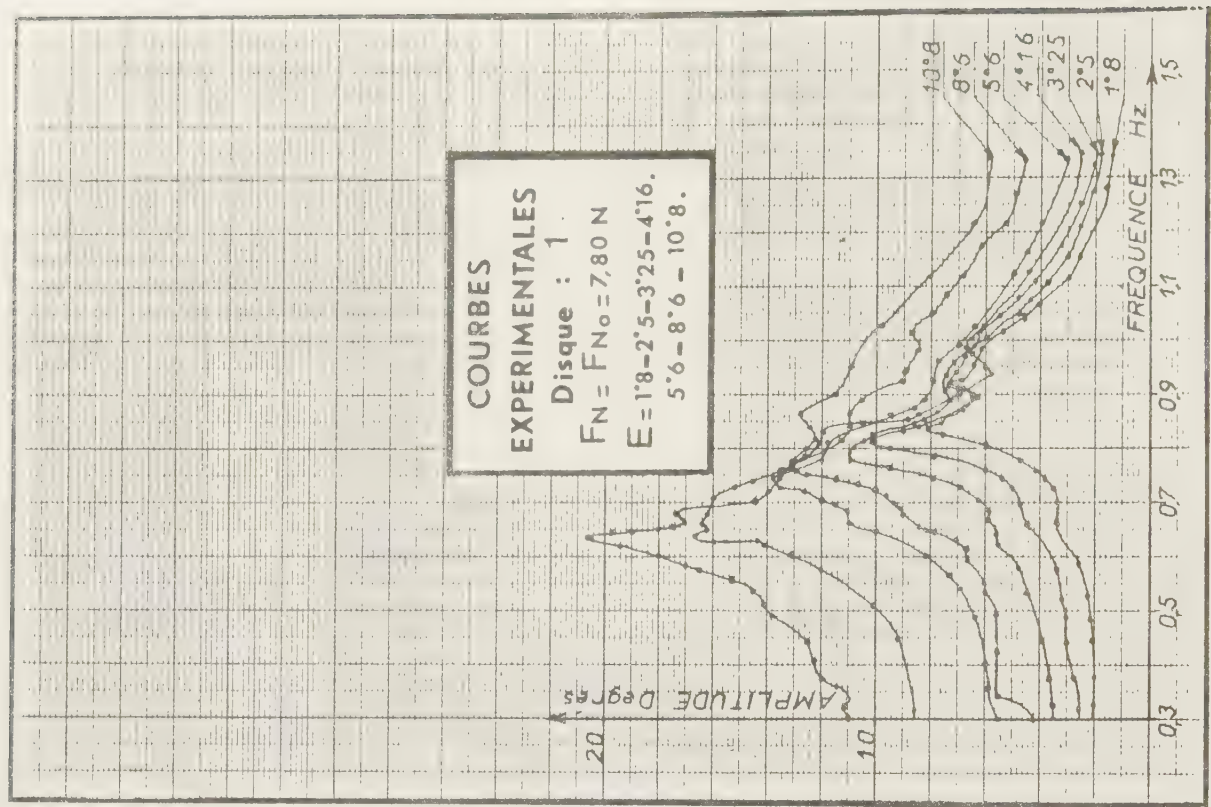


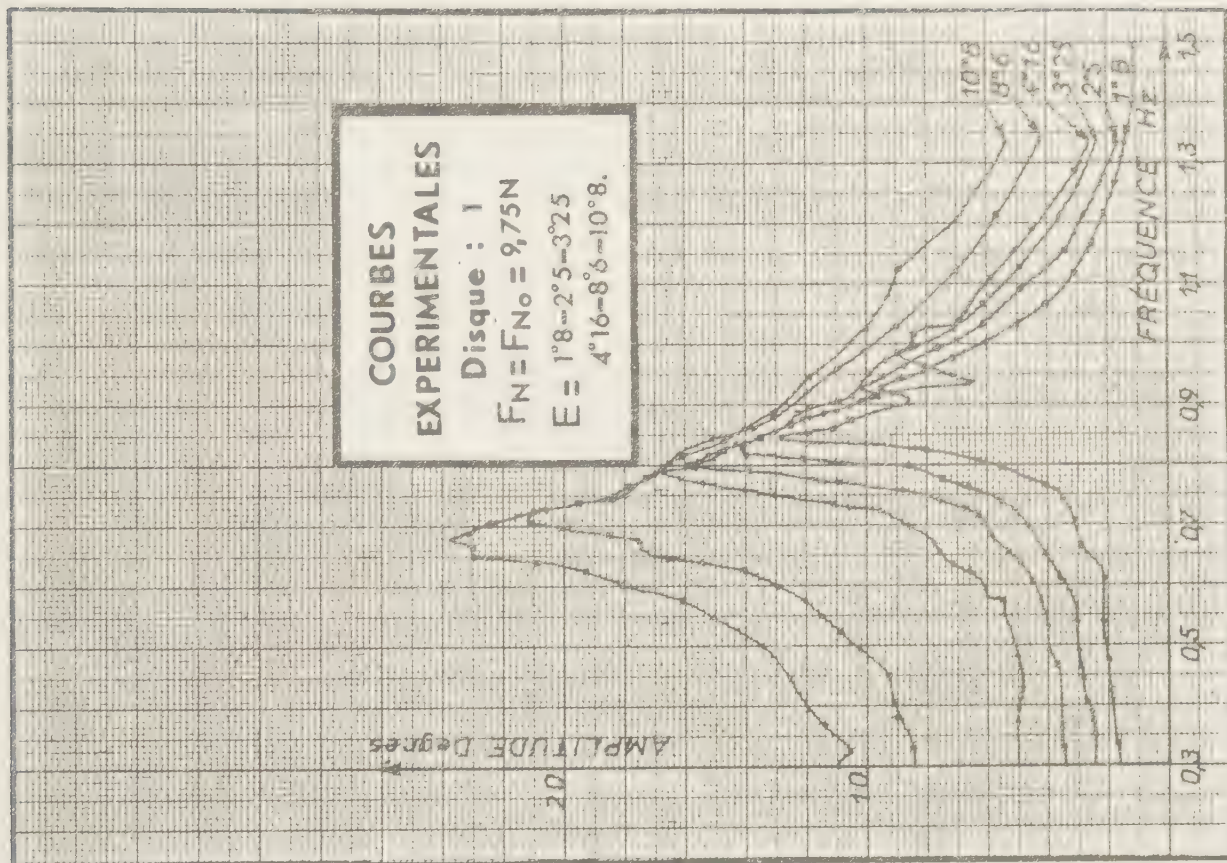
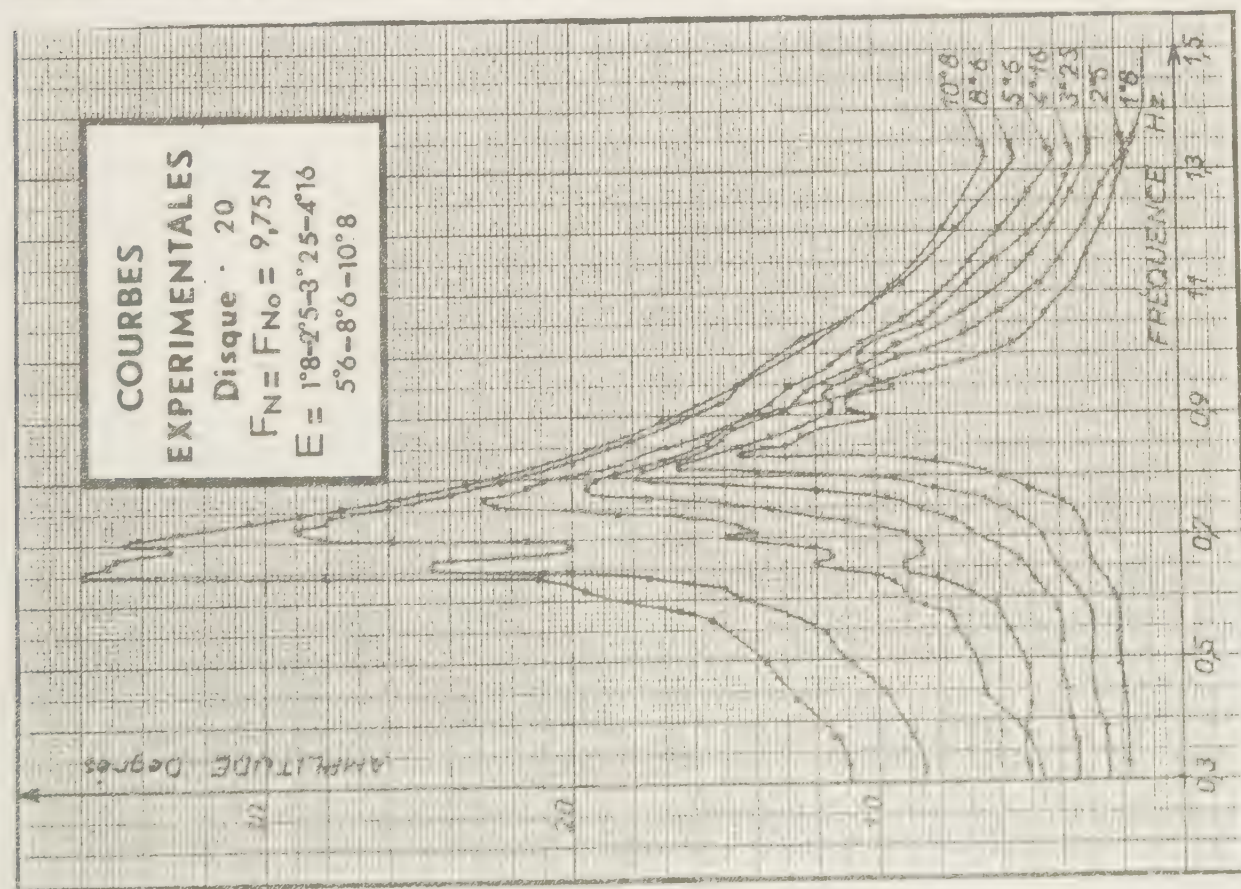
**CYCLES D'HYSTERESIS
GLOBAUX : 1-20.
 $F_N = 9,75 - 11,70 - 15,60 - 19,50 \text{ N.}$**

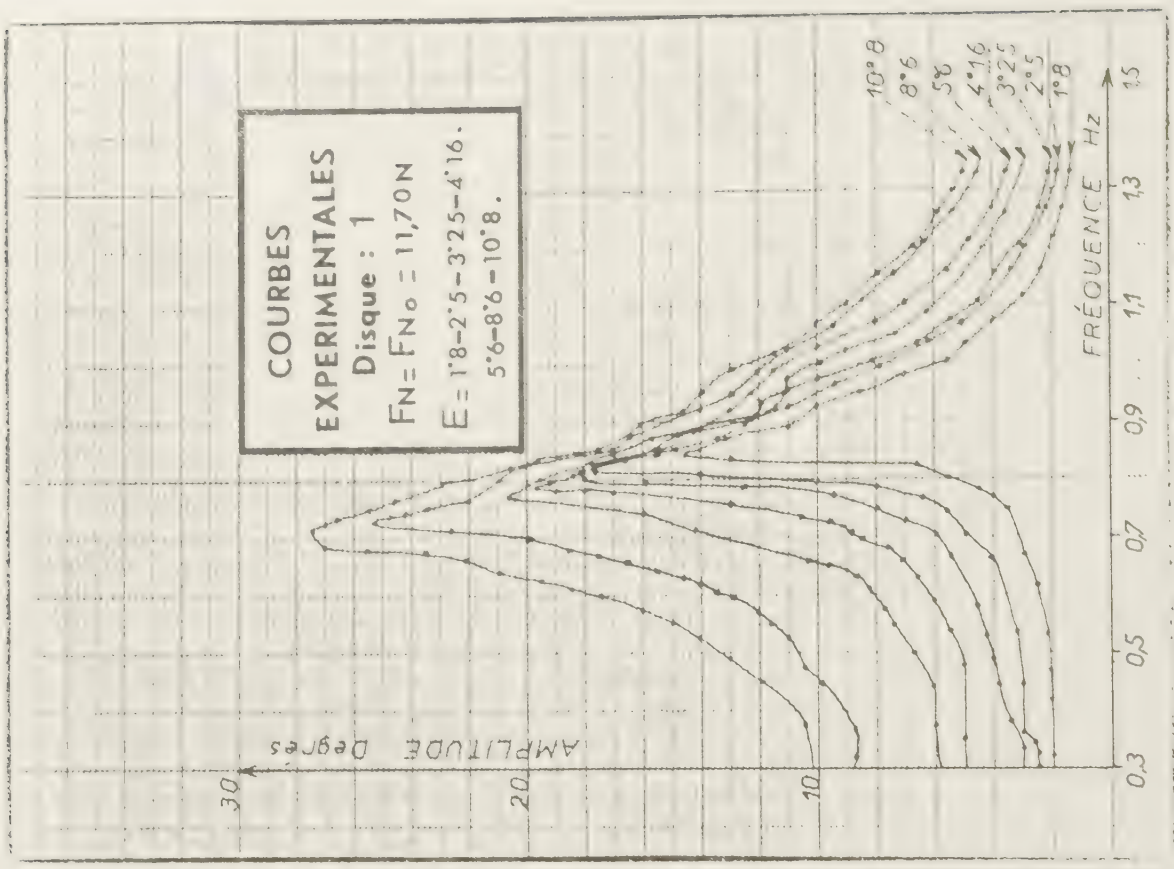
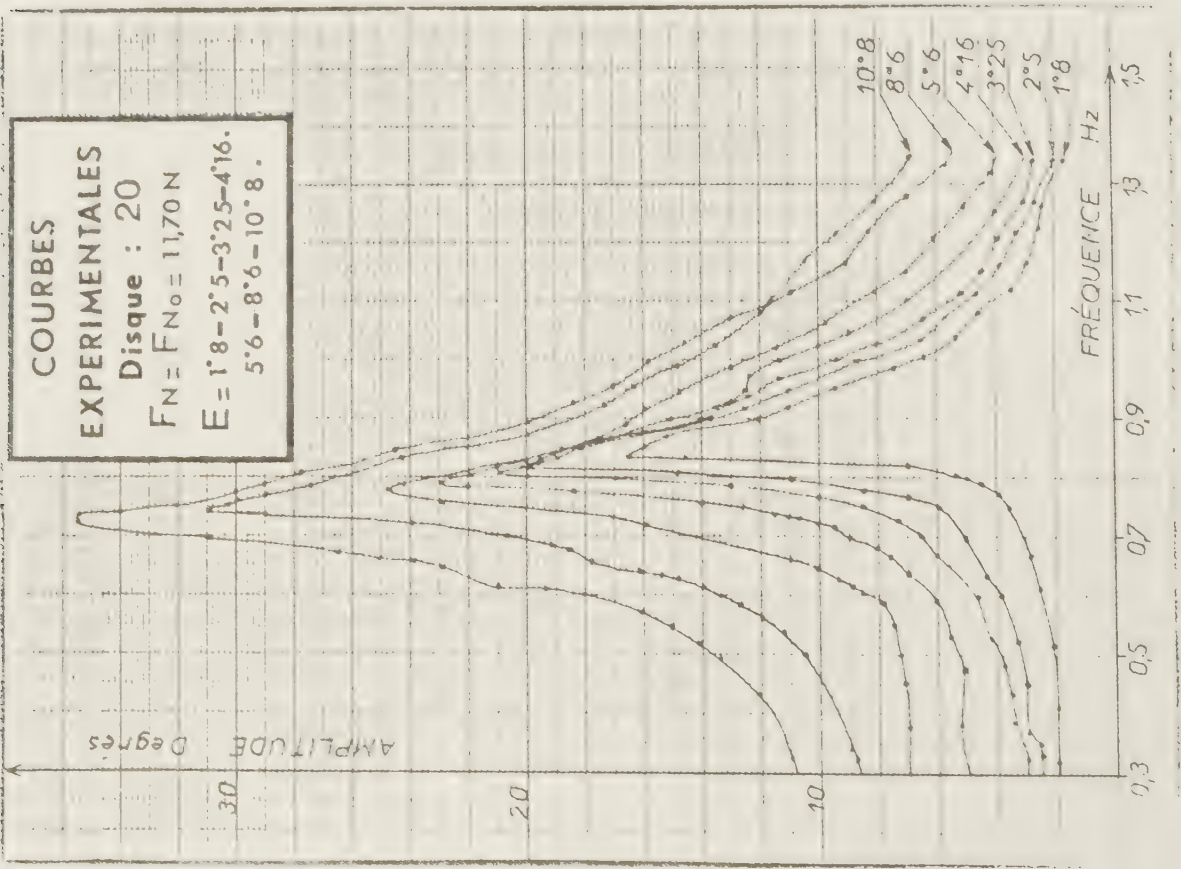


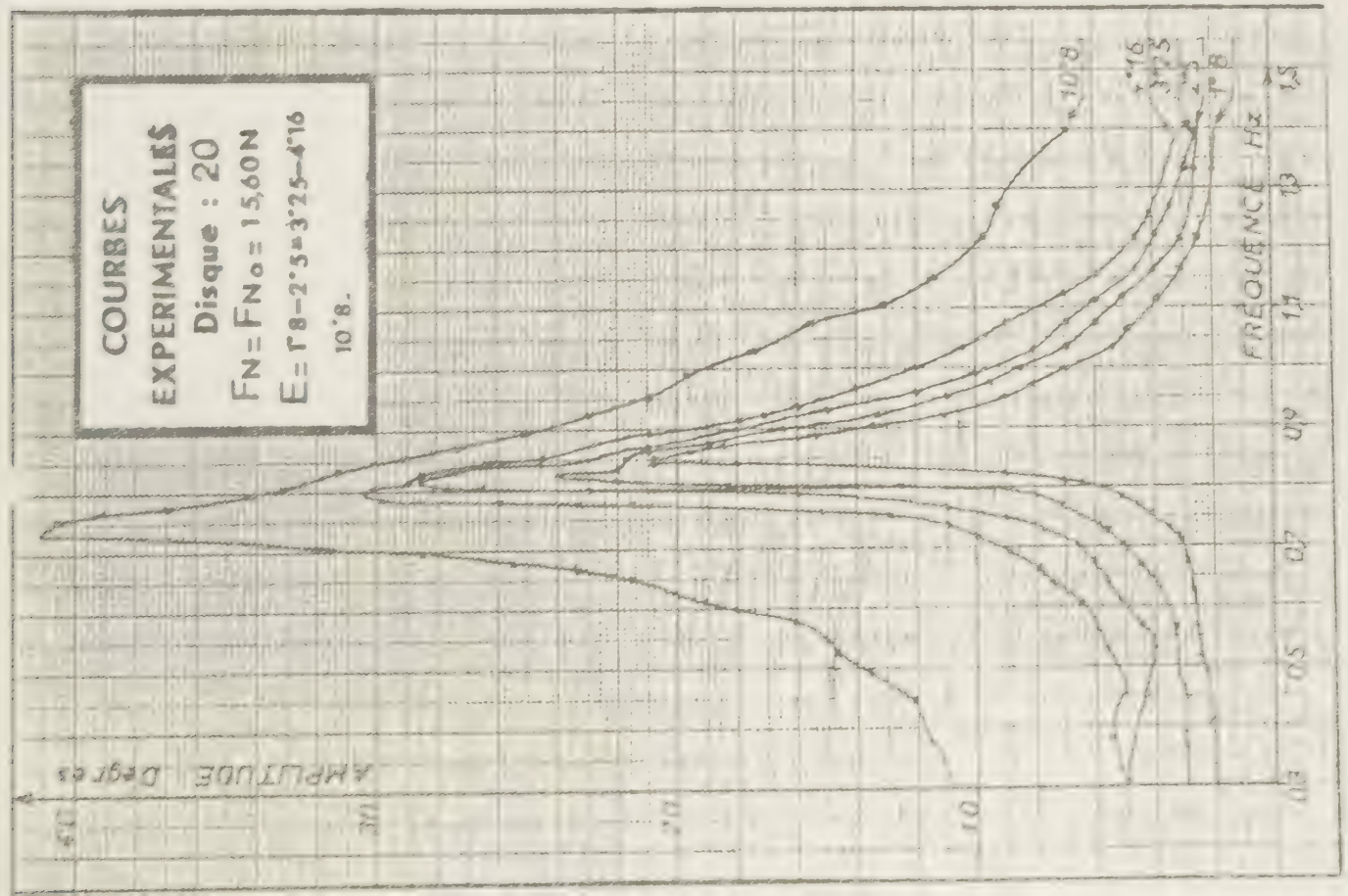
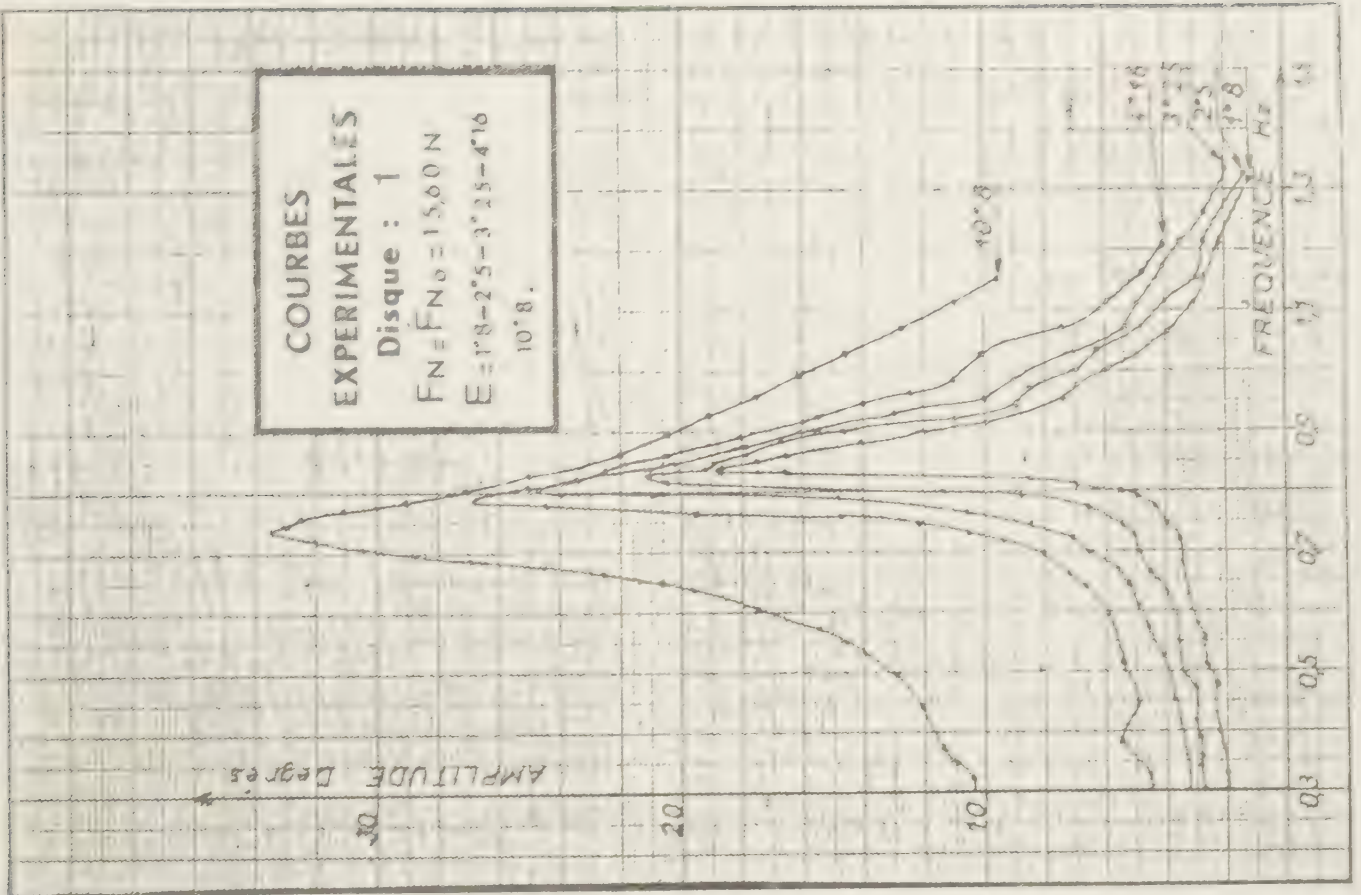
**CYCLES D'HYSTERESIS
GLOBAUX : 1-20
 $F_N = 3,9 - 5,85 - 7,8 \text{ N.}$**

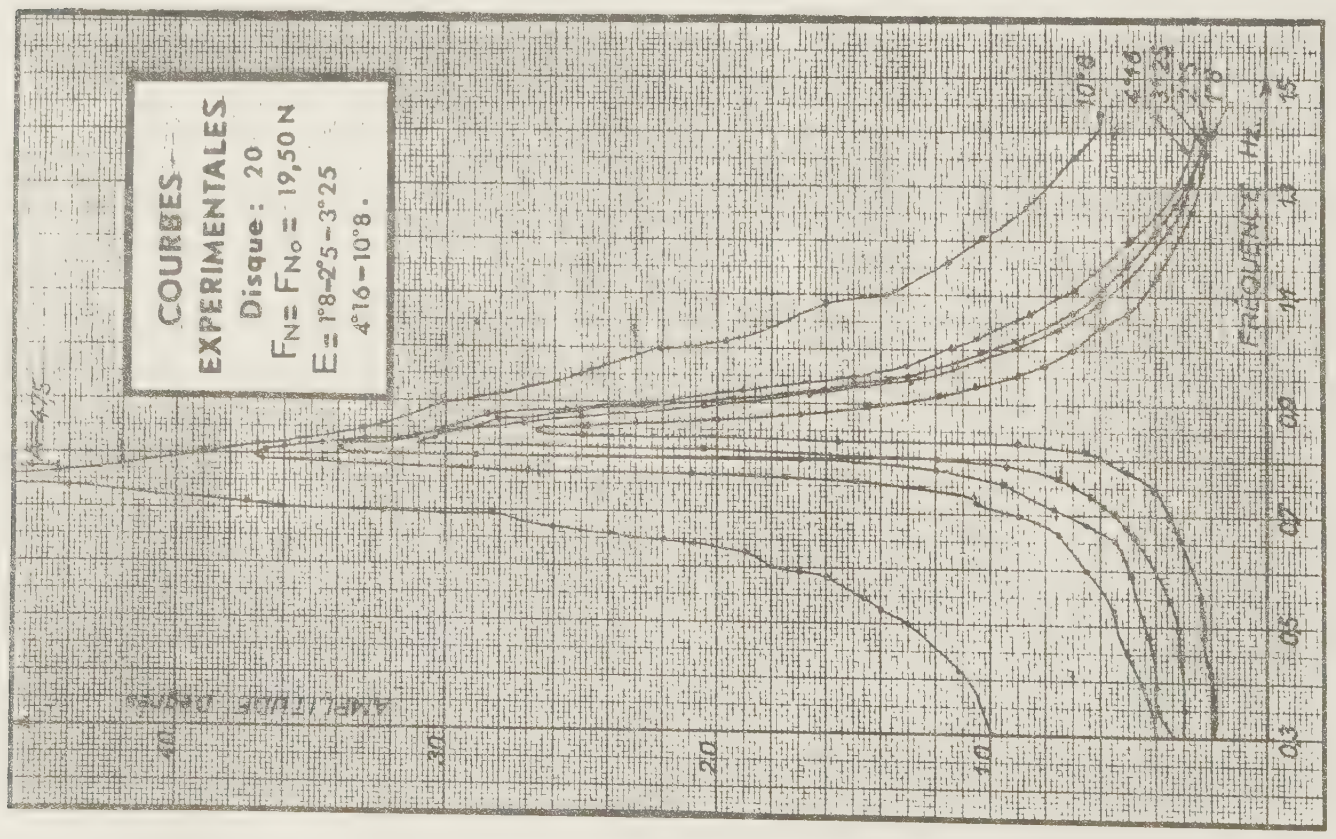
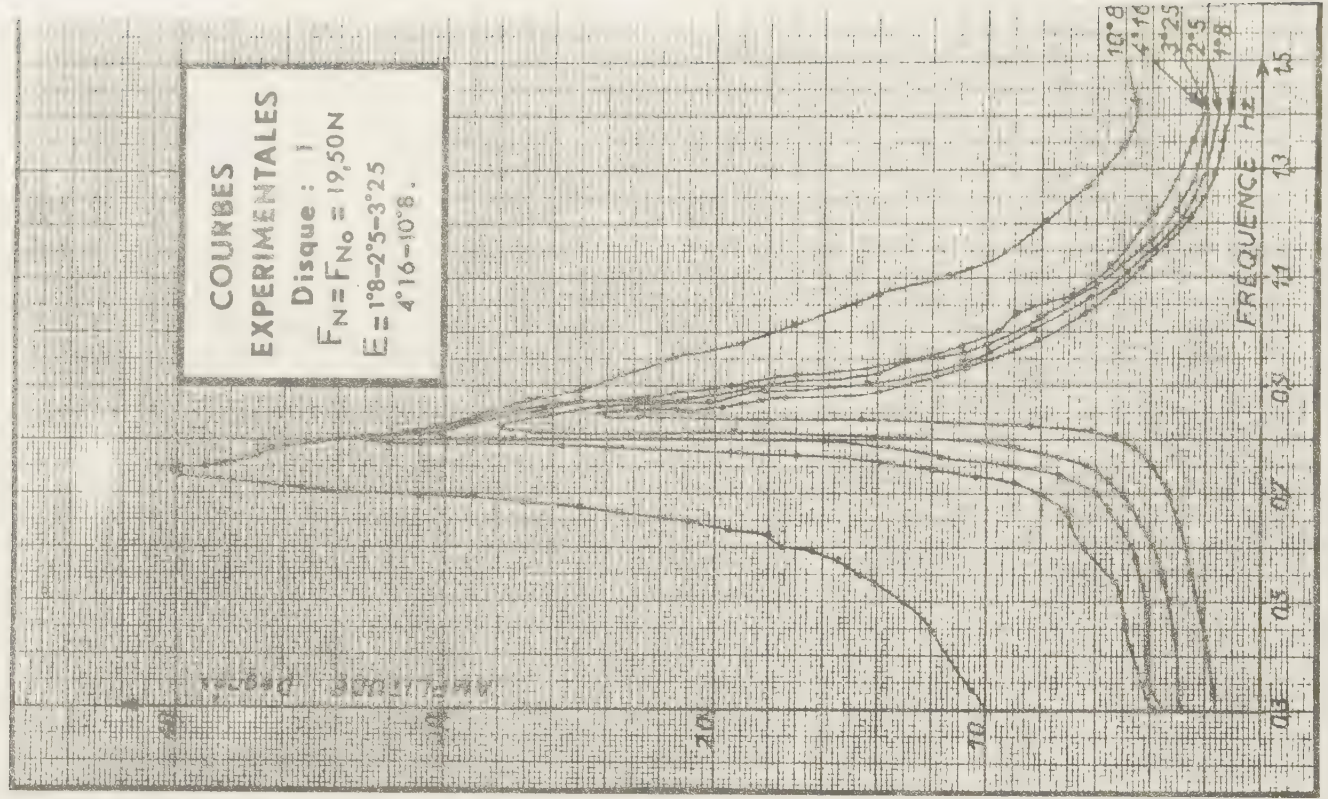


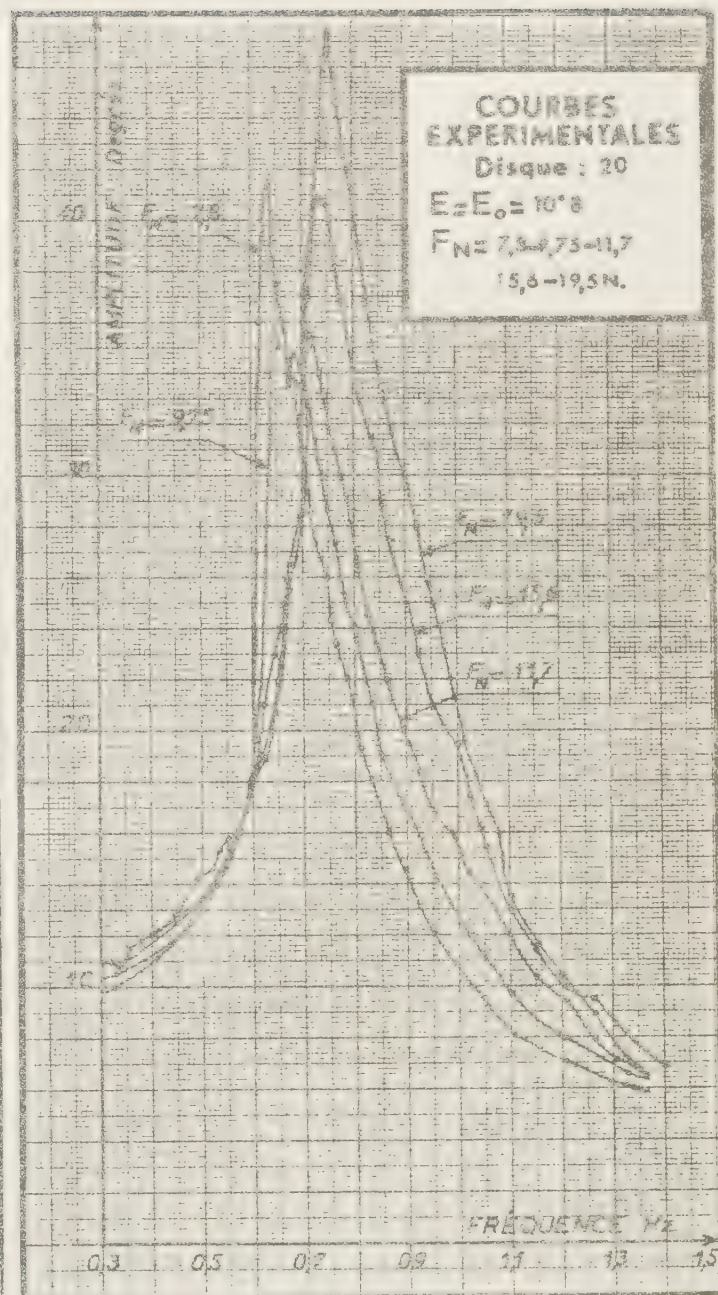
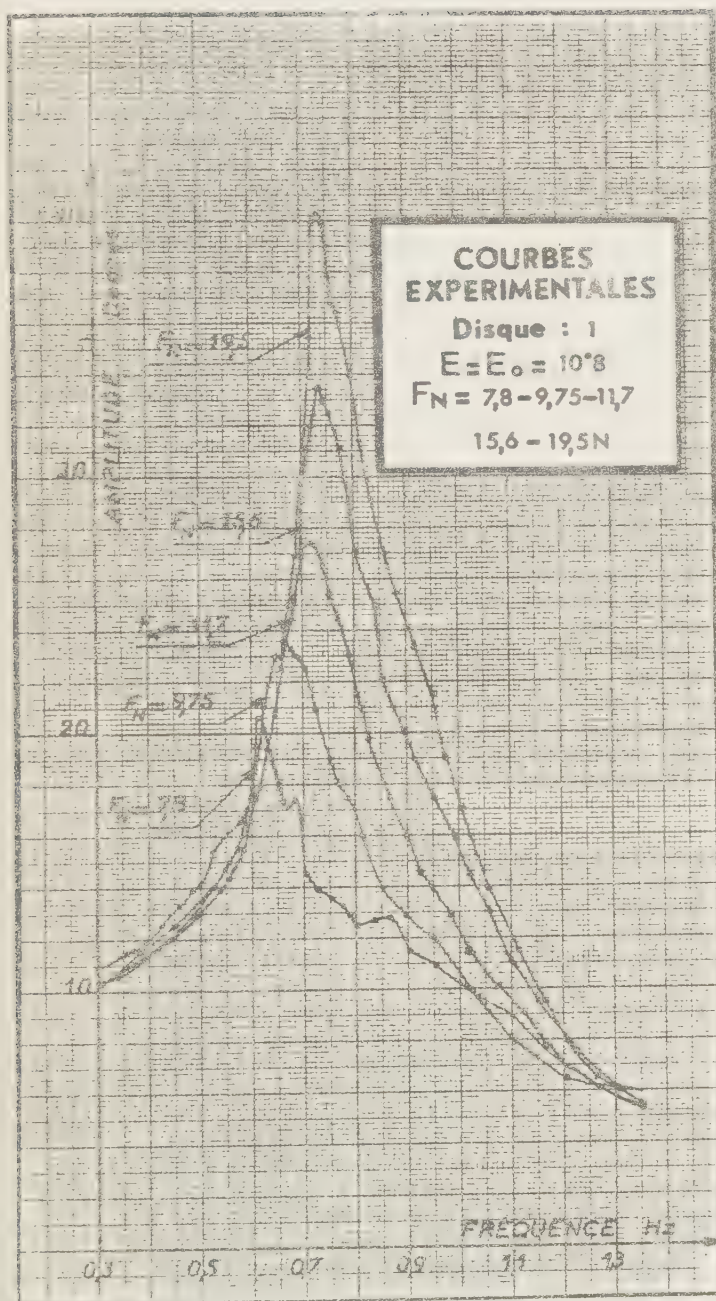




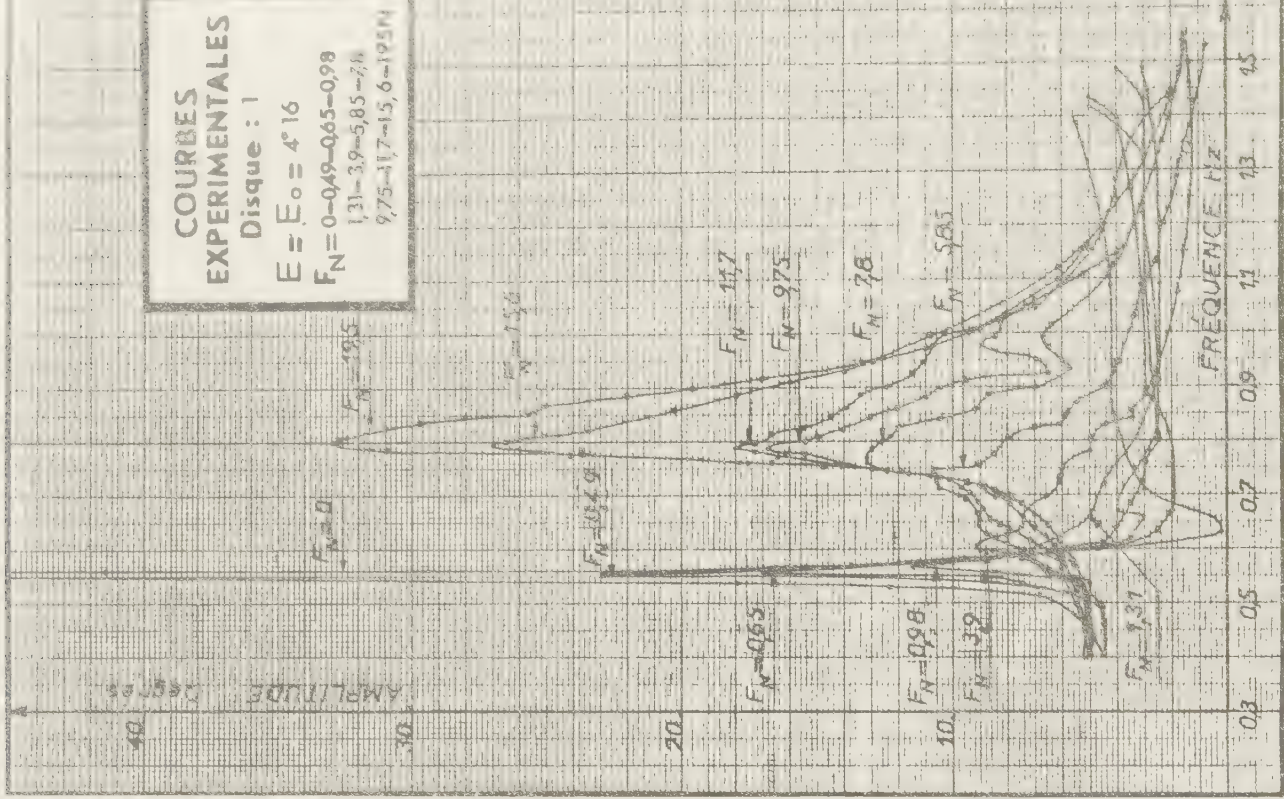




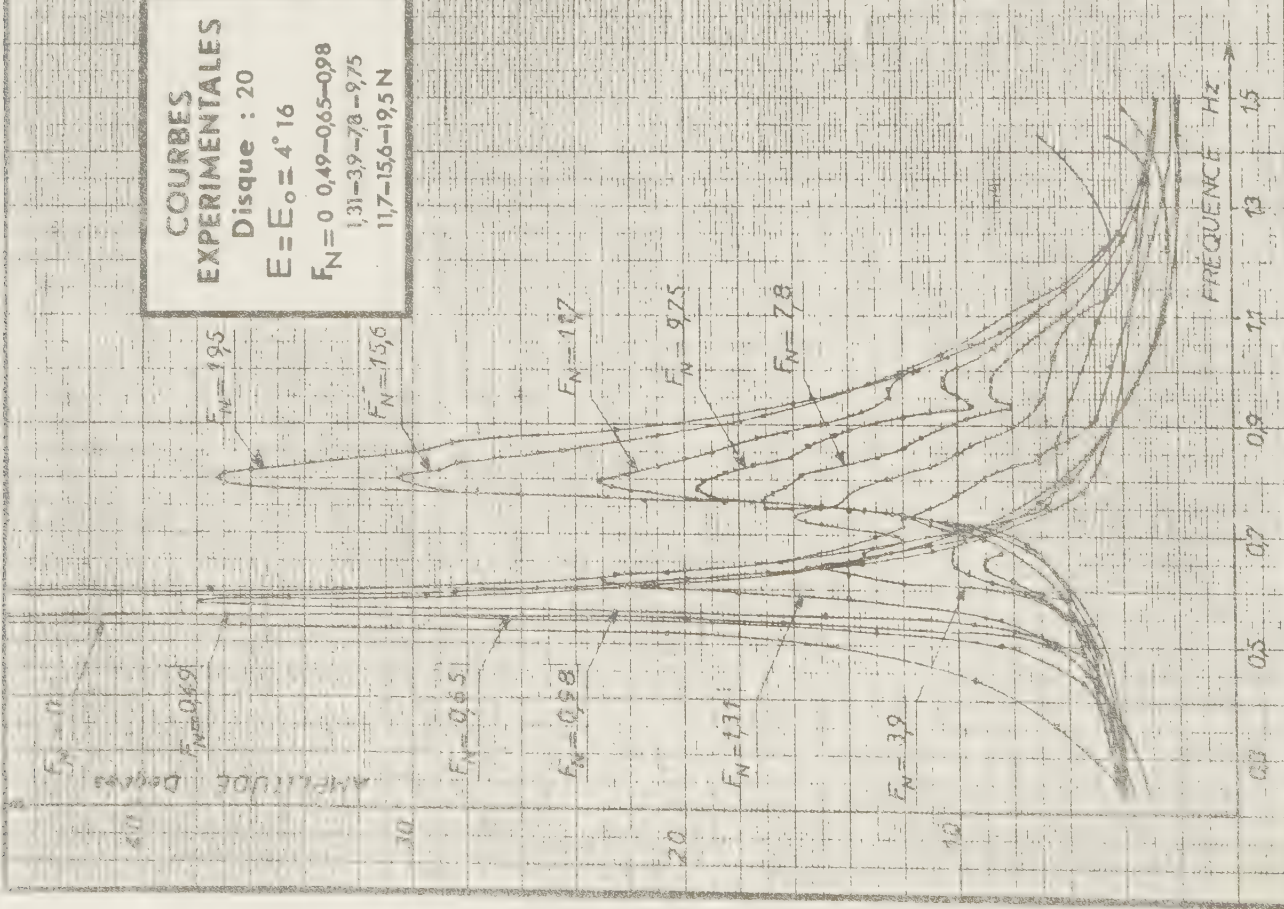


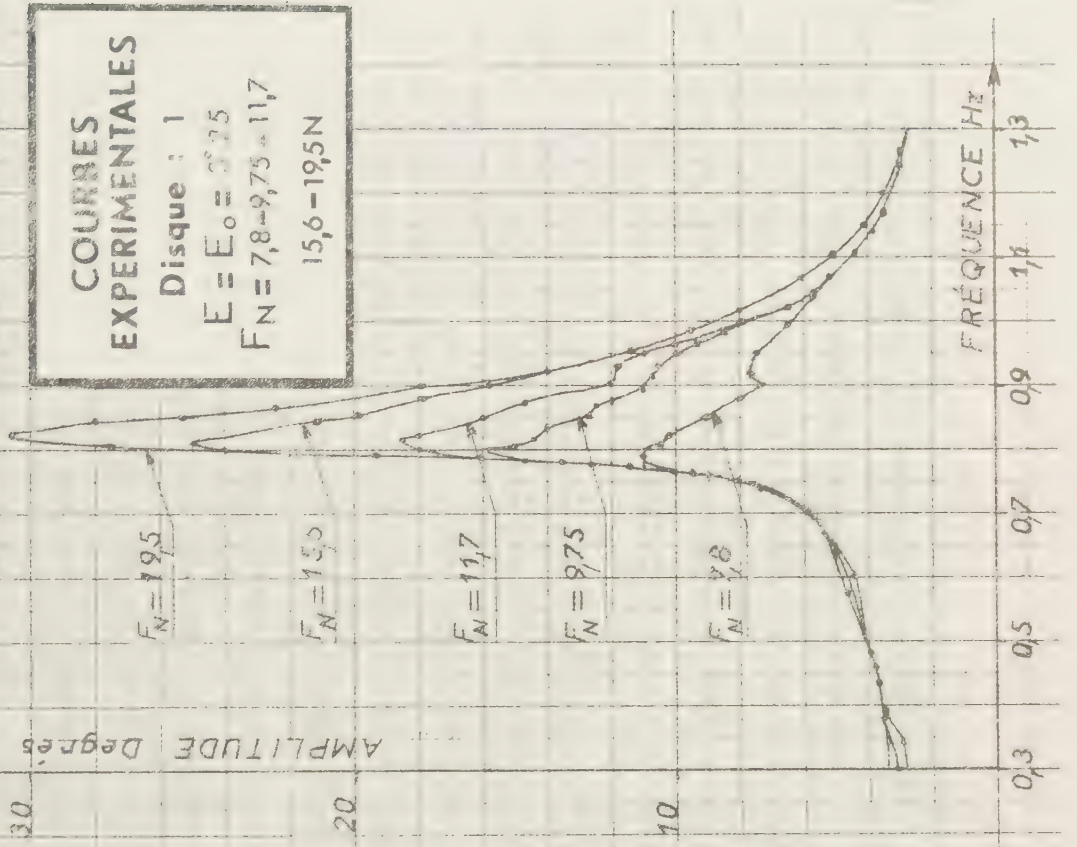
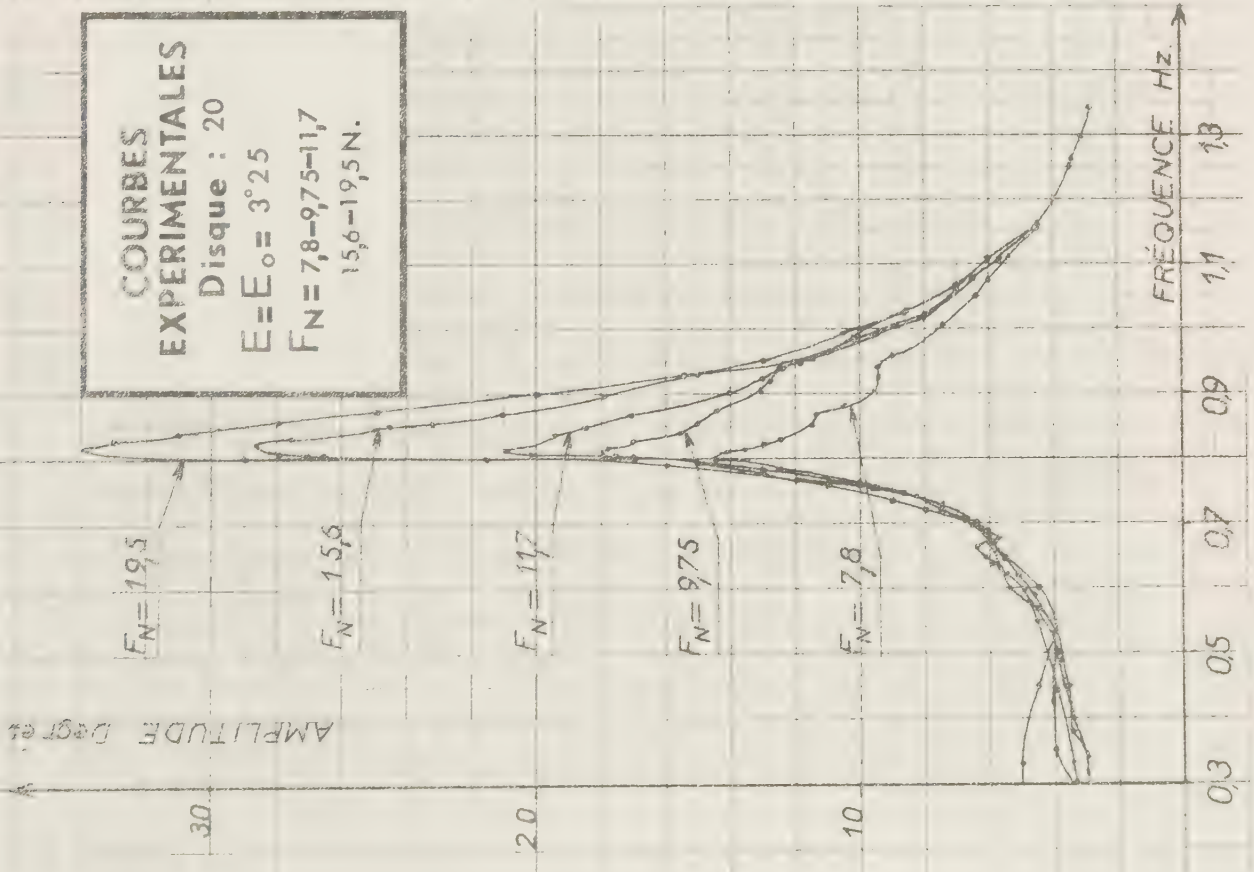


COURBES
EXPERIMENTALES
Disque : 1
 $E = E_0 = 4^{\circ}16$
 $F_N = 0-0.49-0.65-0.98$
1.31-3.9-5.85-7.8
9.75-11.7-15.6-19.5N



COURBES
EXPERIMENTALES
Disque : 20
 $E = E_0 = 4^{\circ}16$
 $F_N = 0-0.49-0.65-0.98$
1.31-3.9-7.8-9.75
11.7-15.6-19.5N





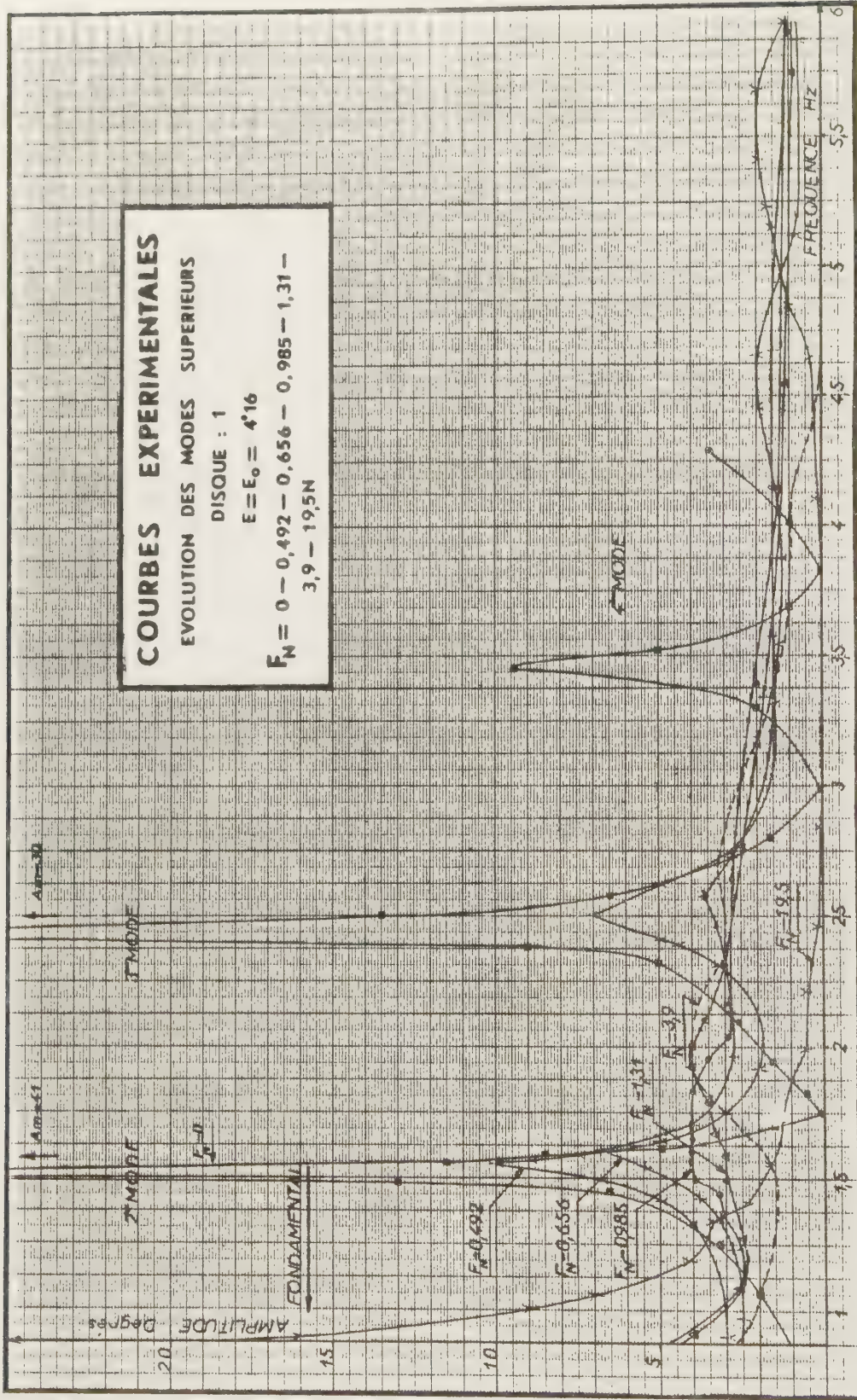
COURBES EXPERIMENTALES

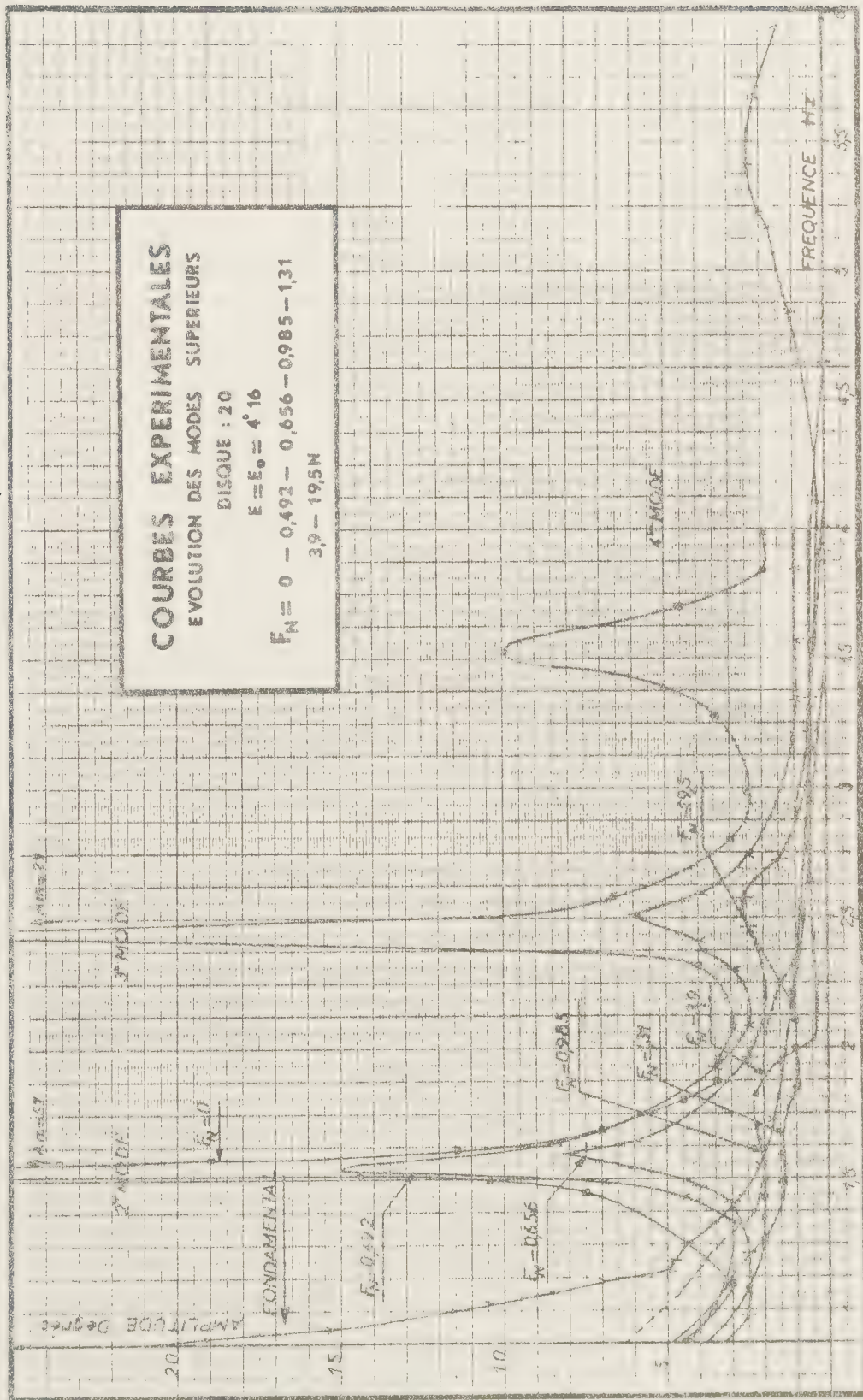
EVOLUTION DES MODES SUPERIEURS

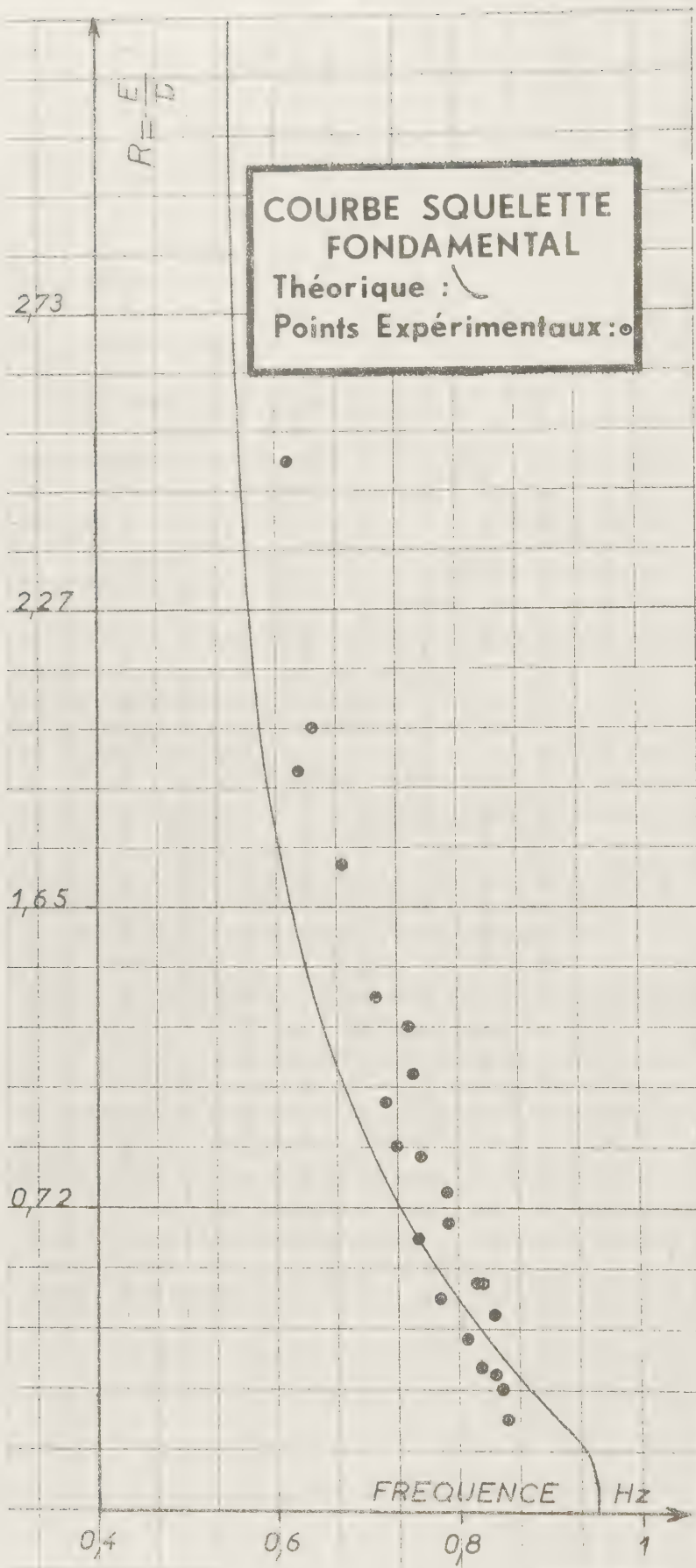
DISQUE : 1

$E = E_0 = 4'16$

$F_N = 0 - 0,492 - 0,656 - 0,985 - 1,31 - 3,9 - 19,5N$







CONCLUSION GENERALE

L'étude théorique et expérimentale des vibrations forcées avec amortissement interne par frottement de COULOMB d'un système en chaîne à deux ou n degrés de liberté, l'une des extrémités étant libre l'autre soumise à une excitation sinusoïdale, nous a permis de mettre en évidence différents points particuliers régissant le phénomène, à savoir :

- *que le problème se ramène essentiellement à la recherche et au tracé du cycle d'hystérésis inter-paramètres qui peut nous donner, par son aire et la pente de sa grande diagonale, respectivement $S(A)$ et $C(A)$.*
- *que dans tous les cas, l'équation de la courbe squelette dépend de $C_p(A_p)$ et donc est liée à la raideur équivalente, donc à la pente de la grande diagonale des cycles d'hystérésis locaux.*
- *que l'étude du bilan énergétique nous montre qu'en définitive, la fréquence de résonance de phase et d'amplitude ne dépend que du rapport $R = \left(\frac{E}{\tau}\right)$ E Module de la force ou du couple d'excitation, τ étant le module de la force ou du couple de frottement.*
- *que théoriquement, il y a conservation des modes propres mais avec un déplacement de fréquence d'autant plus grand qu'il s'agit d'un mode élevé. De plus, pour un rapport R donné, l'amortissement des modes supérieurs est beaucoup plus important que celui du fondamental, et, de ce fait, peut on conclure que pratiquement seul le fondamental reste avec une amplitude modulée importante en fonction de R dans sa zone primitive; les modes supérieurs étant totalement disparus de leur zone primitive. C'est ce que nous confirme l'expérience d'une façon très nette.*

■ que dans tous les cas, pour une excitation donnée, il y a un réglage du frottement optimum qui nous donne une amplitude minimum. D'autre part, si nous sommes maîtres du réglage de l'un des paramètres E ou τ nous pouvons déplacer la fréquence de résonance pour qu'elle soit différente de la valeur « F_0 » fixée à l'avance.

ANNEXES

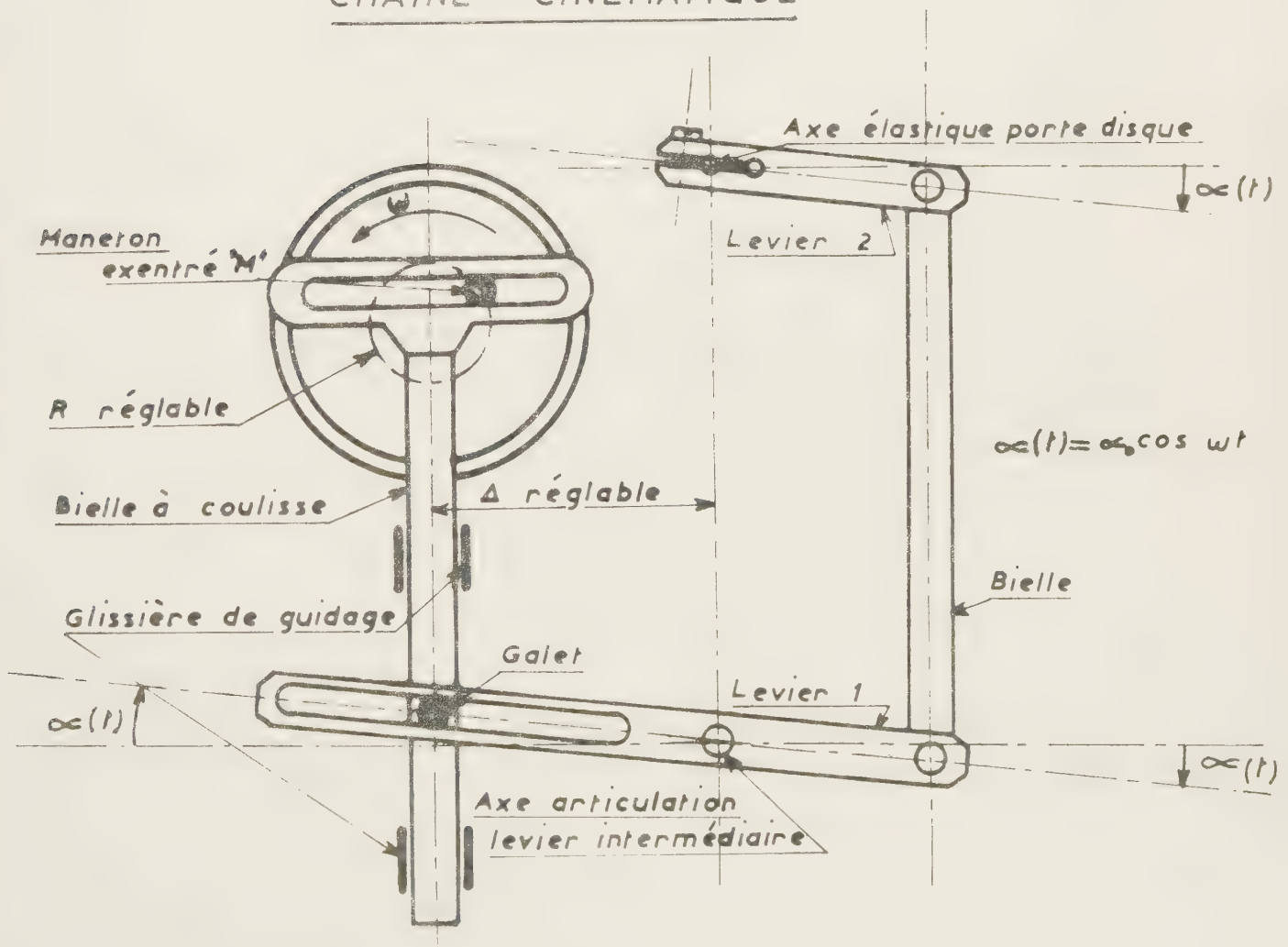
-▲-▲-▲-▲-▲-

Recherche d'une excitation sinusoïdale pure

1 - Généralités -

Il s'agit de transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouvement de rotation sinusoïdal. Le schéma du système qui réalise cette transformation est le suivant :

CHAINE CINEMATIQUE



2 Etude du spectre de fréquence -

A partir du schéma précédent, nous pouvons écrire :

$$\operatorname{tg}(\alpha(t)) = \frac{R \sin \omega t}{\Delta}$$

$$\text{D'où } \alpha(t) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}\left(\frac{R \sin \omega t}{\Delta}\right)$$

Si nous effectuons un développement en série il vient :

$$\alpha(t) = \frac{R}{\Delta} \sin \omega t - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3 \sin^3 \omega t + \frac{1}{5} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^5 \sin^5 \omega t + \dots$$

Si nous nous limitons au troisième ordre, il vient :

$$\alpha(t) \approx \frac{R}{\Delta} \sin \omega t - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3 \sin^3 \omega t$$

$$\text{Or } \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3 \omega t$$

$$\alpha(t) = \left[\frac{R}{\Delta} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3 \right] \sin \omega t + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3 \sin 3 \omega t$$

3 Taux d'harmonique -

Par définition, le taux d'harmonique de rang « i » est le quotient de l'amplitude de l'harmonique « i » à l'amplitude du fondamental. Nous nous bornerons ici au calcul du taux d'harmonique de rang 3 dans le cas le plus défavorable.

$$r_3 = \frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{1}{12} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3}{\frac{R}{\Delta} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\Delta}\right)^3}$$

Le cas le plus défavorable étant celui où R est maximum et Δ minimum, c'est-à-dire, en définitive, où l'excitation est maximum.

Expérimentalement, nous n'avons pas dépassé les valeurs suivantes pour les deux paramètres :

$$R \leq 3,75 \text{ mm}$$

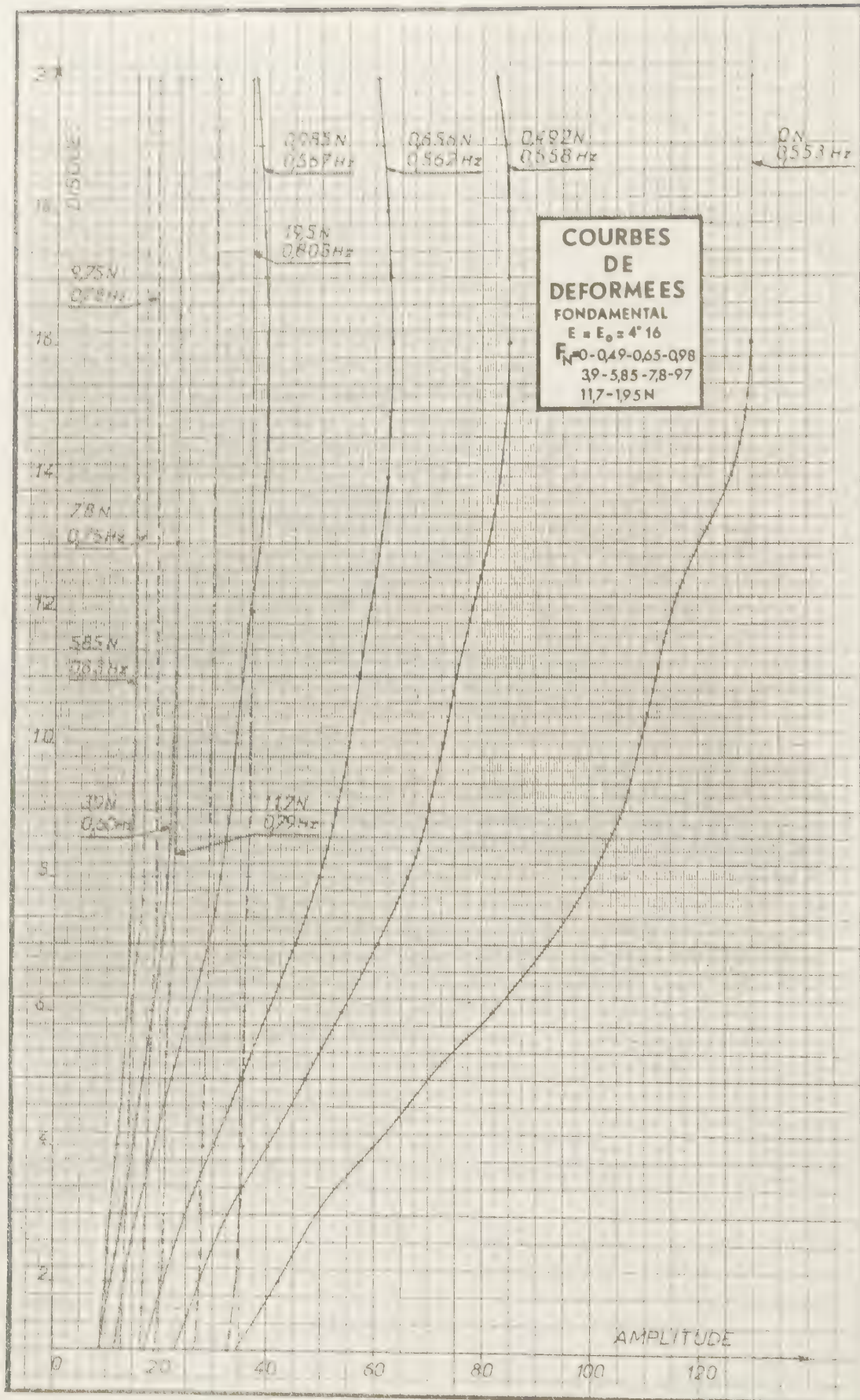
$$\Delta \geq 40 \text{ mm}$$

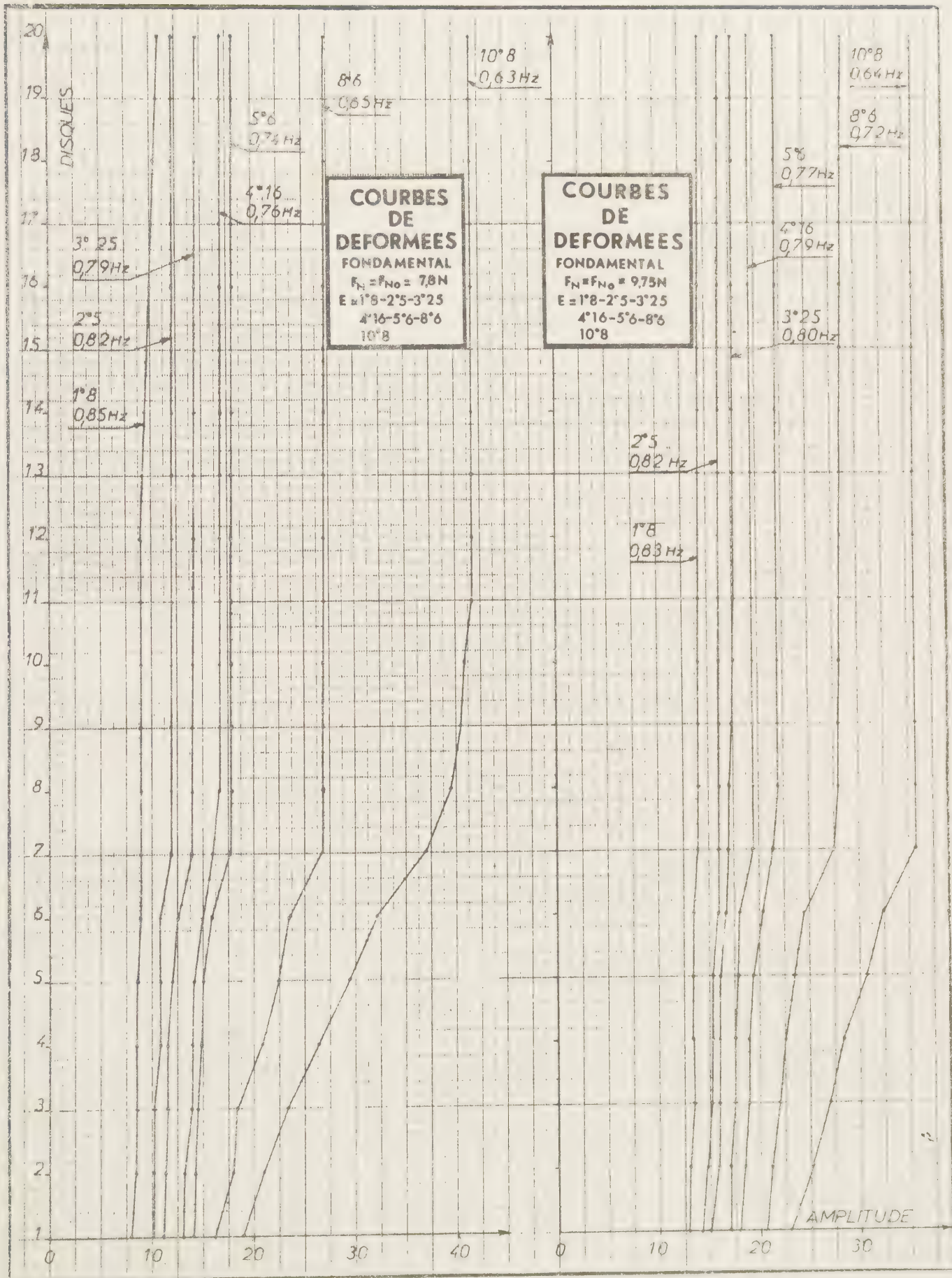
D'où tout calcul fait, nous tenons :

$$r_3 \leq 7,32.10^{-4}$$

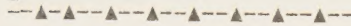
Nous pouvons constater que ce taux d'harmonique est absolument négligeable et que dans le domaine expérimental, l'excitation était bien sinusoïdale « pure » .







BIBLIOGRAPHIE



- 1 - Y. PIRONNEAU - Les cours de mécanique des vibrations et de mécanique non linéaire de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes
- 2 - S. TIMOSHENKO - « Théorie des vibrations à l'usage des Ingénieurs »
Traduction française Béranger 1954 pp. 31 - 64
- 3 - J.P. DEN HARTOG - « Vibration mécanique »
Traduction française Dunod 1960 - pp. 336 - 440
- 4 - N. KRYLOV et N. BOGOLIUBOV - « Introduction to Nonlinear mechanics »
Traduction anglais 1949
- 5 - W.J. CUNNINGHAM - « Analyse non linéaire »
Traduction française Dunod 1963
- 6 - G.S. PISARENKO - « Oscillations of elastic systems with consideration of energy
Scattering in the material » . «
Traduction américaine OTS - US Departement of commerce 1960
- 7 - F. BADRAKHAN - « Etude des systèmes à hystérésis multilinéaire à un ou deux
degrés de liberté »
Thèse Docteur-Ingénieur 1967
Annales E.N.S.M. 2e sem. 1966 p.57 - 76
- 8 - Ladislav PUST - « Influence d'un amortissement non linéaire sur l'allure des résonances
vibratoires d'un système à plusieurs degrés de liberté »
Acad. Sc. de Tchécoslovaquie 1962
- 9 - H. GAUZY et P. SALAUN - « Influence des frottements secs dans les gouvernes
lors de l'essai de vibrations au sol
O.N.E.R.A. 1963 N° 92
- 10 - L.E. GOODMAN and J.H. KLUMPP - « Analysis of slip damping with reference to turbine blade
vibration »
Journal of Applied Mechanics - 1956 - pp.421 - 429

11 - T.K. CAUGHEY

- « Sinusoïdal excitation of a system with bilinear hysteresis »
Journal Applied Mechanics 1960 pp. 640 - 643

12 - WD IVAN

-«The steady - state cesponse of a two degree of freedom bilinear hysteresis system »
Journal of Applied Mechanics 1965 pp. 151 - 156

13 - W.D. IVAN

- « A distributed element model for hysteresis and its steady state dynamic response »
Journal of Applied Mechanics 1966 - pp. 893 - 900

14 - GORDON CK. YEH

« Forced vibrations of a two degree of freedom Systeme with combined Coulomb and Viscons damping »
Journal of Acoustical Society of America 1966 - pp.14 - 24



